# Propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du d-bar et des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe.

Stéphanie Lovera

**UNIVERSITÉ DE PROVENCE**
**U.F.R. M.I.M.**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences de l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

par Stéphanie Lovera

sous la direction du Pr. El Hassan Youssfi

Sujet:

# Propriétés Spectrales de l'Opérateur Solution Canonique du $\overline{\partial}$ et des Opérateurs de Hankel de Symbole Antiholomorphe

soutenue le 8 juin 2005

après avis des rapporteurs :

M. **Éric Amar**
M. **Kehe Zhu**

devant le jury composé de :

M. **Éric Amar**
M. **Laurent Baratchart**
M. **Joaquim Bruna**
M. **Bernard Coupet**
M. **El Hassan Youssfi**

## *REMERCIEMENTS*

*Je désire tout d'abord remercier mon directeur de thèse El Hassan Youssfi qui a accompagné mes activités de recherche et m'a fait partager sa grande culture mathématique. Je tiens à lui manifester ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apportée.*

*Messieurs Éric Amar et Kehe Zhu m'ont fait un très grand honneur en acceptant de rapporter cette thèse. Les travaux de Kehe Zhu sur les opérateurs de Hankel ont été une source d'inspiration importante dans mon travail et je tiens à remercier Éric Amar pour ses remarques pertinentes et ses conseils avisés.*

*Je suis très reconnaissante envers Messieurs Laurent Baratchart et Joaquim Bruna d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail en acceptant de faire partie de mon jury.*

*Je suis particulièrement touchée que Bernard Coupet, que j'ai eu la chance d'avoir comme enseignant, ait accepté de faire partie du jury de cette thèse. Je voudrais lui exprimer toute ma gratitude pour le soutien qu'il m'a apporté depuis mon année de préparation à l'agrégation.*

*De nombreuses personnes m'ont aidé durant mes années de thèse. Je souhaite tout particulièrement exprimer ma reconnaissance à Franck Boyer, Karim Kellay, Stanislav Kupin, Joël Merker et Stéphane Rigat pour leurs conseils, leur grande disponibilité et leur soutien qui a été très important pour moi. Je tiens aussi à remercier Sylvain Damour pour la gentillesse avec laquelle il nous a accueillies, mes camarades et moi, dans le bureau 116. Je remercie également Anne Nouri pour son soutien.*

*Je dois également beaucoup à mes amis qui, tout au long de ma thèse, m'ont encouragé et m'ont aidé par exemple à répéter mes exposés ou à relire ma thèse. Un immense merci donc à Florence, Léa, Alexandre, Nicolas, Nicolas et Sébastien.*

*Je souhaiterais également exprimer toute ma reconnaissance à certains de mes professeurs qui, tant par leurs qualités d'enseignant que par leur gentillesse, ont marqué ma scolarité et pour qui j'ai une affection particulière. Je pense en particulier à Hélène Maugendre qui m'a fait partagé avec beaucoup de générosité et de simplicité son goût des mathématiques en dirigeant mon T.E.R. de maîtrise et à Gérard Fardoux dont j'admire le travail, l'enthousiasme et le dévouement pour ses élèves. Je les remercie tous les deux pour leurs encouragements qui m'ont énormément aidé.*

*Je remercie chaleureusement toutes les personnes de l'Université de Provence qui m'ont toujours reçue avec beaucoup de gentillesse lorsque j'avais des problèmes d'ordre administatif, informatique ... Merci en particulier à Aline Blanc, Sylvie Blanc, Nathalie Bonifay, Gisèle Fiol, Muriel Gouyache, Sandrine Ifrah, Julie Raud, Chantal Ravier, Nora Snacel, Noëlle Tabaracci, Marie-Christine Tort, Anna Wojciechowska, Gérard Henry, Hervé Masia, Georges Moutouh et Kaï Poutrain.*

*Enfin, je voudrais saluer tous ceux que mes années de thèse m'ont donné la chance de rencontrer ou de mieux connaître; je pense en particulier à Florence, Florian, Franck, Isabelle, Julie, Julie, Julien, Maud, Muriel, Rémi, Renaud, Sonia et Sylvaine, sans oublier mes amis plus anciens Isabelle, Sophie, François et Sylvain.*

*Enfin, je remercie de tout mon coeur mes parents et ma marraine qui m'ont soutenue et encouragée durant toutes mes années d'études.*

**Propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ et des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe**

Cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ en liaison avec les opérateurs de Hankel dans le cas de plusieurs variables complexes.

Dans un premier temps, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$. Dans le cas d'une variable complexe, F. Haslinger a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur l'espace de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$ et de mesure radiale $\mu$, dans l'espace $L^2$ associé, soit compact et soit un opérateur de Hilbert-Schmidt en fonction des moments de la mesure $\mu$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, portant toujours sur la croissance des moments de la mesure $\mu$, pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten, et ce dans le cas d'une ou plusieurs variables et pour toute une classe d'espaces de Hilbert contenant des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques comme des espaces de Bergman à poids, des espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, des espaces de Hardy-Sobolev, l'espace de Hardy ou l'espace invariant de Möbius.

Dans un second temps, on s'intéresse à l'existence d'un opérateur de Hankel défini sur un espace de Hilbert de fonctions holomorphes, de symbole antiholomorphe non trivial dans une classe de Schatten donnée et on cherche à étudier le rapport entre la croissance d'une fonction $f$ et la taille des valeurs singulières de l'opérateur de Hankel induit par $\bar{f}$. Le cas des espaces de Bergman à poids sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ a été traité par S. Axler, J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre et S. Janson dans le cas d'une variable, et par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson, J. Peetre, R. Wallsten, K. T. Hahn, E. H. Youssfi et K. Zhu dans le cas de plusieurs variables. Dans ce travail, on considère l'espace de Hardy du disque unité de $\mathbb{C}$, l'espace de Dirichlet et des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes sur le disque unité de $\mathbb{C}$. On donne d'abord une condition nécessaire et suffisante sur $p$ pour que la $p^{ème}$ classe de Schatten contienne un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Ensuite, on caractérise les fonctions $f$ pour lesquelles l'opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En outre, on établit des conditions nécessaires sur $f$ pour que l'opérateur induit par $\bar{f}$ soit un opérateur borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten, excepté dans le cas de l'espace de Dirichlet.

**Mots clés:** Classes de Schatten, Opérateur de Hankel, Équation du $\overline{\partial}$.

**Classification mathématique: 32W05, 47B35, 47B10, 47B38.**

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ en liaison avec les opérateurs de Hankel dans le cas de plusieurs variables complexes. En premier lieu, on s'intéresse aux propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ défini sur un espace de Hilbert de (0,1)-formes à coefficients holomorphes. En second lieu, on étudie les grands opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe définis via la projection de Bergman sur certains sous-espaces de l'espace de Hardy du disque unité de $\mathbb{C}$.

## 1.1 Présentation générale

### 1.1.1 Opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$

Une première partie de ce travail concerne l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ défini sur les (0,1)-formes à coefficients holomorphes. On rappelle que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ classique est l'opérateur qui, à toute (0,1)-forme à coefficients $L^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue, associe la solution $L^2$ de l'équation du $\overline{\partial}$ qui est orthogonale à l'espace de Bergman des fonctions holomorphes de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ fournit une solution de l'équation du $\overline{\partial}$ de norme $L^2$ minimale (voir [4] et [20]).

La question de la compacité de l'opérateur solution du $\overline{\partial}$ a été étudiée pour différentes raisons, notamment à cause du lien qui existe entre les propriétés de l'opérateur solution du $\overline{\partial}$ et celles de l'opérateur du $\overline{\partial}$-Neumann (voir [10], [11], [13], [14], [26] et [41]). L'opérateur du $\overline{\partial}$-Neumann $N$ est l'inverse de l'opérateur auto-adjoint $\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}$. La compacité de l'opérateur du $\overline{\partial}$-Neumann est une propriété élémentaire qui a de nombreuses conséquences très utiles (voir [13]). Dans le cas des domaines à bord lisse, cela entraîne la régularité globale du problème du $\overline{\partial}$-Neumann (dans le sens où les espaces de Sobolev sont préservés). La théorie de Fredholm pour les opérateurs de Toeplitz est une conséquence directe de la compacité de l'opérateur du $\overline{\partial}$-Neumann. En fait, la compacité de cet opérateur implique que les commutateurs entre la projection de Bergman et les opérateurs de multiplication sont également compacts; ce résultat est utilisé pour étudier des conditions de positivité sur les polynômes. En outre, qu'il soit compact ou non, le problème du $\overline{\partial}$-Neumann est lié à certaines $C^*$-algèbres d'opérateurs naturellement associées à un domaine de $\mathbb{C}^n$.

De plus, S. Fu et E. Straube ont montré dans [13] que la compacité de l'opérateur solution du $\overline{\partial}$ sur les (0,1)-formes d'un domaine convexe borné $\Omega$ de $\mathbb{C}^n$ implique que le bord de $\Omega$ ne contient aucune variété analytique de dimension supérieure ou égale à un, et ceci en utilisant uniquement qu'il existe un opérateur solution du $\overline{\partial}$ compact sur les (0,1)-formes à coefficients holomorphes. Dans ce cas, la compacité du $\overline{\partial}$ sur les (0,1)-formes à coefficients holomorphes donne la compacité du $\overline{\partial}$ sur les (0,1)-formes.
Un phénomène similaire apparaît dans l'article [41] de N. Salinas, A. Sheu et H. Upmeier qui traite de la $C^*$-algèbre de Toeplitz $\mathcal{T}(\Omega)$ et dans lequel ils étudient le lien entre la structure de $\mathcal{T}(\Omega)$ et le problème du $\overline{\partial}$-Neumann. Plus précisément, les auteurs montrent que si $\Omega$ est un domaine de Reinhardt pseudoconvexe complet dans $\mathbb{C}^2$, alors la compacité du $\overline{\partial}$-Neumann sur les (0,1)-formes à coefficients analytiques entraîne que le bord de $\Omega$ ne peut contenir aucune composante holomorphe de dimension un.
En outre, on peut remarquer que dans de nombreux cas, la non-compacité de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ a déjà lieu lorsque cet opérateur est restreint au sous-espace correspondant des (0,1)-formes à coefficients holomorphes (voir [13], [26] et [41]).

Il est donc naturel de s'intéresser aux propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ restreint aux (0,1)-formes à coefficients holomorphes. En 2001, F. Haslinger étudie la compacité et l'appartenance à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ défini sur des espaces de Bergman à poids du disque unité de $\mathbb{C}$ et sur des espaces de Fock du plan. Dans [17], l'auteur donne une expression explicite de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ restreint aux (0,1)-formes à coefficients holomorphes en fonction de la projection de Bergman sur des domaines bornés arbitraires et montre que cet opérateur peut être interprété en termes d'opérateurs de Hankel. Plus précisément, soit $\Omega$ un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$. On note $L^2(\Omega)$ l'espace constitué des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\Omega$ et $\mathcal{A}^2(\Omega)$ l'espace de Bergman constitué des fonctions holomorphes dans $L^2(\Omega)$. On désigne par $P$ la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathcal{A}^2(\Omega)$, appelée projection de Bergman. On considère l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ classique $S$, à savoir

$$S : \mathcal{A}^2(\Omega)^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\Omega)$$

tel que $\overline{\partial}\, S(g) = g$ et $S(g) \perp \mathcal{A}^2(\Omega)$ pour toute (0,1)-forme $g \in \mathcal{A}^2(\Omega)^{(0,1)}$. Si $g = \sum_{j=1}^n g_j d\overline{z}_j$ appartient à $\mathcal{A}^2(\Omega)^{(0,1)}$, alors :

$$S(g) = \sum_{j=1}^n H_{\overline{z}_j}(g_j),$$

où pour $j = 1,\ldots,n$, $H_{\overline{z}_j}$ désigne l'opérateur de Hankel de symbole $\overline{z}_j$, c'est-à dire l'opérateur défini par :

$$H_{\overline{z}_j}(f) = [I - P]\,(\overline{z}_j f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}^2(\Omega).$$

Dans [18], F. Haslinger montre également que la compacité de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur l'espace de Bergman associé à une mesure $\mu$ est liée à la croissance des moments de cette mesure. Plus exactement, il considère l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur des espaces de Bergman à poids sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. Il suppose que la mesure $\mu$ est radiale et que les monômes $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de l'espace de Bergman à poids $\mathcal{A}^2(\mathbb{D},\mu)$ constitué des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ de carré intégrable par rapport à la mesure $\mu$. L'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes en termes des moments de la mesure $\mu$ pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit compact. Pour être plus précis, si on note

$$m_k = \int_{\mathbb{D}} |z^k|^2 \, d\mu(z)$$

le moment d'ordre $n$ de la mesure $\mu$, alors l'opérateur $S : \mathcal{A}^2(\mathbb{D},\mu) \longrightarrow L^2(\mathbb{D},\mu)$ est compact si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} - \frac{m_k}{m_{k-1}} = 0.$$

Cette caractérisation provient du fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le monôme $z^k$ est un vecteur propre de $S^*S$, de valeur propre associée $\lambda_k = \frac{m_{k+1}}{m_k} - \frac{m_k}{m_{k-1}}$.

Un résultat similaire est obtenu dans [19], où F. Haslinger considère l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur les espaces de Fock du plan. En effet, l'auteur donne de nouveau des conditions nécessaires et suffisantes en termes de moments.

L'objet du chapitre 3 est d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ dans le cas de plusieurs variables. Dans le cas d'une variable, l'opérateur $S^*S$ est diagonalisable, ce qui permet de caractériser la compacité et l'appartenance à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt directement par le calcul. En revanche, dans le cas de plusieurs variables, cet opérateur n'est plus diagonalisable. Notre méthode consiste à trouver des sous-espaces de dimension finie invariants sous l'action de $S^*S$ et à établir des estimations uniformes des valeurs propres de $S^*S$ sur ces espaces stables. Dans ce chapitre, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, toujours en termes de moments, pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne aux classes de Schatten pour toute une classe d'espaces de Hilbert de (0,1)-formes à coefficients holomorphes et ce dans le cas de plusieurs variables. Nos résultats s'appliquent en particulier aux espaces des (0,1)-formes à coefficients dans l'un des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques, tels que les espaces de Bergman à poids, l'espace de Hardy, les espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, les espaces de Hardy-Sobolev ou l'espace invariant de Möbius.

### 1.1.2 Opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe

Dans une seconde partie, le problème général est d'établir le lien entre les propriétés d'une fonction holomorphe $f$ et la nature du grand opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$. L'étude des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe possède une longue histoire.

Ce sont tout d'abord les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ du disque unité de $\mathbb{C}$ qui furent étudiés. Comme l'espace orthogonal à $H^2(\mathbb{D})$ ne diffère de l'espace conjugué de $H^2(\mathbb{D})$ que d'une dimension, il n'existe essentiellement qu'un type d'opérateur de Hankel sur l'espace de Hardy. On désigne par $L^2(\partial\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de longueur d'arc sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. On note $H^2(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy constitué des fonctions dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ telles que leurs coefficients de Fourier d'indice strictement négatif soient nuls. Pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ de symbole $\bar{f}$ est l'opérateur de $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ défini par

$$H_{\bar{f}}(g) := (I - P_s)(\bar{f}g) \quad \text{pour tout } g \in H^2(\mathbb{D}),$$

où $P_s$ est la projection de Szegö, c'est-à-dire la projection orthogonale de $L^2(\partial\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{D})$. En fait, $H_{\bar{f}}$ est seulement défini sur $H^\infty(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.
La caractérisation des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe bornés sur l'espace de Hardy est dûe en 1957 à Z. Nehari ([31]) et celle des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe compacts sur cet espace fut donnée en 1958 par P. Hartman ([16]). Plus précisément, Z. Nehari a montré que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ défini sur l'espace de Hardy est borné si et seulement si $f$ est dans l'espace $BMOA$, constitué des fonctions dans $H^2(\mathbb{D})$ possédant une oscillation principale bornée. Le résultat de P. Hartman donne que l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est compact si et seulement si $f$ appartient à l'espace $VMOA$, constitué des fonctions dans $H^2(\mathbb{D})$ ayant une oscillation principale évanescente. D'autres caractérisations de la continuité et de la compacité pour les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy en terme d'action sur les noyaux reproduisants furent établies par F. F. Bonsall dans [6] et F. Holland et D. Walsh dans [21]. L'étude de l'appartenance aux classes de Schatten des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Hardy est dûe en 1982 à V. V. Peller ([34]) dans le cas $p \geq 1$, et simultanément à S. Semmes ([43]) et V. V. Peller ([36]) en 1984 dans le cas $0 < p < 1$. Ces auteurs ont montré que pour $p > 0$, l'opérateur $H_{\bar{f}}$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ si et seulement si $f$ appartient à l'espace de Besov $B_p$ constitué des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^p |f'(z)|^p \frac{1}{(1 - |z|^2)^2}\, d\nu(z) < +\infty,$$

où $\nu$ désigne la mesure planaire.

Dans le cas de l'espace de Bergman, il existe deux types d'opérateurs de Hankel : le petit opérateur de Hankel et le grand opérateur de Hankel. Ceci provient du fait que l'orthogonal de l'espace de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ du disque unité de $\mathbb{C}$ est bien plus gros que l'espace conjugué de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Les petits opérateurs de Hankel sont définis via la projection sur l'espace conjugué de l'espace de Bergman $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$. Plus précisément, on désigne par $L^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$. On note $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{D})$ et $\overline{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ dans $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$. Pour $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, le petit opérateur de Hankel $\widetilde{H_{\bar{f}}}$ de symbole $\bar{f}$ est défini pour $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ par :

$$\widetilde{H_{\bar{f}}}(g) := \overline{P}(\bar{f}g).$$

Les petits opérateurs de Hankel se comportent un peu comme les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy. Dans [12], M. Feldman et R. Rochberg ont même obtenu des résultats sur les petits opérateurs de Hankel sur l'espace de Bergman de la boule à partir de certaines propriétés des opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy.

En revanche, l'étude des grands opérateurs de Hankel sur l'espace de Bergman est totalement différente de celle des opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy. De plus, nous verrons par la suite que les résultats pour l'espace de Bergman diffèrent souvent de ceux obtenus dans le cas de l'espace de Hardy. En particulier, dans le cas de l'espace de Bergman, on voit apparaître un phénomène dit de « coupure » pour les classes de Schatten qui n'existe pas dans le cas de l'espace de Hardy.
L'étude des opérateurs de Hankel sur l'espace de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$ fut initiée en 1986 par S. Axler ([3]). À l'origine, S. Axler cherchait à caractériser les fonctions $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ telles que le commutateur de l'opérateur de multiplication par $f$ soit compact. Il travaillait sur ce problème car les opérateurs de multiplication sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ fournissent des exemples élémentaires d'opérateurs sous-normaux. De plus, la théorie développée par L. G. Brown, R. G. Douglas et P. A. Fillmore dans [7] peut être appliquée aux opérateurs d'espaces de Hilbert $T$ tels que $T^*T - TT^*$ soit un opérateur compact. Or, pour $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, si on désigne par $T_f$ l'opérateur de multiplication par $f$, on a

$$T_f^*T_f - T_fT_f^* = H_{\bar{f}}^*H_{\bar{f}}.$$

Cette dernière égalité l'a ainsi amené à étudier les opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Bergman. On désigne par $P$ la projection de Bergman, à savoir la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Pour $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, le grand opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ de symbole $\bar{f}$ est l'opérateur de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$, défini par

$$H_{\bar{f}}(g) := (I - P)(\bar{f}g) \text{ pour tout } g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

L'opérateur $H_{\bar{f}}$ est en fait seulement défini sur un sous-espace de $H^\infty(\mathbb{D})$.
Dans [3], S. Axler montre que $H_{\bar{f}}$ est borné si et seulement si $f$ appartient à l'espace de Bloch, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < +\infty.$$

Il établit également que $H_{\bar{f}}$ est compact si et seulement si $f$ est dans le petit espace de Bloch, c'est-à-dire si et seulement si

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0.$$

L'appartenance aux classes de Schatten des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$ fut ensuite étudiée en 1987 par J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre dans [2]. On voit apparaître un phénomène dit de « coupure » qui n'existait pas dans le cas de l'espace de Hardy. Plus précisément, pour $p > 1$, on retrouve des résultats similaires au cas de l'espace de Hardy, à savoir $H_{\bar{f}}$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $f$ appartient à l'espace de Besov $B_p$. En revanche, contrairement au cas de l'espace de Hardy, il n'existe pas pour $p \leq 1$, d'opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial appartenant à la $p^{ème}$ classe de Schatten. En fait, J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre traitent le cas plus général des grands opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur des espaces de Bergman à poids via la projection de Bergman qui leur est associée. Plus précisément, pour $\alpha > -1$, on désigne par $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $(1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)$, où $\nu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$. On note $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman à poids constitué des fonctions holomorphes dans $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ et $P_\alpha$ la projection de Bergman associée, c'est-à-dire la projection orthogonale de $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Pour $f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ de symbole $\bar{f}$ est l'opérateur de $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ dans $L^2_\alpha(\mathbb{D})$, défini par

$$H_{\bar{f}}(g) = (I - P_\alpha)(\bar{f}g) \;\text{ pour tout } g \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

Dans ce cas, les résultats sont les mêmes que ceux établis dans le cas de l'espace de Bergman classique : $H_{\bar{f}}$ est borné si et seulement si $f$ est dans l'espace de Bloch, compact si et seulement si $f$ est dans le petit espace de Bloch et appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $f$ appartient à l'espace de Besov $B_p$.

Des résultats semblables ont été obtenus dans le cas de l'espace de Bergman de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson et J. Peetre ([1]), R. Wallsten ([45]), K. T. Hahn et E. H. Youssfi ([22]) et K. Zhu ([47], [48]). En ce qui concerne le phénomène de « coupure » pour $n \geq 2$, K. Zhu a montré qu'il existe un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial dans la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > 2n$.

Les démonstrations des résultats concernant les opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Bergman font principalement intervenir l'expression intégrale des opérateurs de Hankel et différents espaces et objets invariants sous l'action du groupe de Möbius.

Svante Janson fut le premier à étudier en 1988 des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe défini sur un espace de Bergman à poids du disque unité de $\mathbb{C}$ différent de celui associé à la projection de Bergman intervenant dans la définition de l'opérateur de Hankel. Pour être plus précis, soient $\alpha > -1$ et $\beta > -1$. Pour

$f \in \mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ de symbole $\bar{f}$ considéré est l'opérateur de $\mathcal{A}_\beta^2(\mathbb{D})$ dans $L_\alpha^2(\mathbb{D})$, défini par

$$H_{\bar{f}}(g) = (I - P_\alpha)(\bar{f}g) \text{ pour tout } g \in \mathcal{A}_\beta^2(\mathbb{D}).$$

La difficulté réside alors dans la perte partielle de l'invariance sous l'action du groupe de Möbius.
En plus des outils classiques tels que la forme intégrale des opérateurs de Hankel et l'invariance non-isométrique sous l'action du groupe de Möbius des opérateurs de Hankel, S. Janson dût faire appel à de nouveaux outils comme l'étude des petits opérateurs de Hankel, l'interpolation, le principe du maximum sur les classes de Schatten ou la décomposition atomique des espaces de Besov.
Les résultats obtenus par S. Janson sont similaires à ceux obtenus par S. Axler, J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre dans le cas classique. En effet, dans ce cas, l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est borné si et seulement si $f$ est dans un espace de Bloch pondéré, $H_{\bar{f}}$ est compact si et seulement si $f$ est dans un petit espace de Bloch pondéré et $H_{\bar{f}}$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $f$ appartient à un certain espace de Besov.

Dans le chapitre 4, nous considérons une classe d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}_m$ de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ pour $0 \leq m \leq 1$. Pour des choix particuliers du paramètre $m$ on retrouve des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques comme l'espace de Hardy, l'espace de Dirichlet ou des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les grands opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe définis via la projection de Bergman sur l'espace $\mathcal{H}_m$ à valeurs dans l'espace $L^2(\mathbb{D})$. Nous donnons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante pour que la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ contienne un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Ensuite, nous nous intéressons au lien entre le comportement au bord de la fonction holomorphe $f$ et la nature de l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ qui lui est associé. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. En outre, dans le cas où $0 < m \leq 1$, nous montrons que si $H_{\bar{f}}$ est borné (respectivement compact), alors $f$ appartient à un espace de Bloch pondéré (respectivement à un petit espace de Bloch pondéré). Enfin, nous prouvons que si $H_{\bar{f}}$ est dans la $p^{ème}$ classe de Schatten, alors $f$ appartient à un certain espace de Besov.

## 1.2 Présentation détaillée

Nous détaillons un peu le contenu de chaque chapitre de cette thèse.

### 1.2.1 Chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement certains résultats sur les opérateurs d'espaces de Hilbert sans donner les démonstrations. Ces résultats seront utilisés dans les chapitres 3 et 4. Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous donnons la définition d'un opérateur adjoint au sens de Von Neumann et rappelons la définition d'un opérateur auto-adjoint. Nous énonçons également le théorème spectral ainsi qu'un théorème de décomposition spectrale pour les opérateurs auto-adjoints. Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons aux opérateurs compacts et notamment à l'existence d'une décomposition de Schmidt pour ces opérateurs. De plus, nous donnons une caractérisation de la compacité spécifique aux opérateurs auto-adjoints. Dans le troisième paragraphe, nous définissons tout d'abord la suite des valeurs singulières d'un opérateur compact et étudions les propriétés de cette suite. Ensuite, nous donnons la définition des classes de Schatten et énonçons plusieurs résultats permettant de caractériser les éléments d'une classe de Schatten suivant leur action sur les bases orthonormales. Enfin, nous discutons de la structure topologique des classes de Schatten.

### 1.2.2 Chapitre 3.

Dans ce qui suit, $\Omega$ désigne une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ tout entier. On considère $\mu$ une mesure de probabilité invariante par rotation sur $\Omega$. Les propriétés de symétrie de $\Omega$ et de $\mu$ sont essentielles. Par exemple, on ne peut pas étendre notre méthode au cas où $\Omega$ est un ellipsoïde. On suppose également que la mesure $\mu$ admet des moments de tout ordre, c'est-à-dire :

$$m_k := \int_\Omega |z|^{2k} d\mu(z) < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre $m_k$ est appelée moment d'ordre $k$ de la mesure $\mu$. L'existence des moments implique en particulier que tous les polynômes sont de carré $\mu$-intégrable sur $\Omega$.

On désigne par $L^2(\Omega,\mu)$ l'espace des fonctions mesurables sur $\Omega$ de carré intégrable par rapport à la mesure $\mu$. L'invariance par rotation de $\Omega$ et de $\mu$ implique que les monômes de degrés différents sont orthogonaux dans $L^2(\Omega,\mu)$ et que le produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ peut être exprimé en fonction du produit scalaire de Fischer sur les espaces des polynômes holomorphes homogènes de degré constant. Cette dernière propriété jouera un rôle fondamental dans la preuve de nos résultats.

Rappelons que le produit scalaire de Fischer $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ est défini sur l'espace des polynômes holomorphes par sa restriction sur les monômes donnée par :

$$\left\langle z^\alpha, z^\beta \right\rangle_{\mathcal{F}} := \begin{cases} \alpha! & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

pour tous $\alpha,\beta$ dans $\mathbb{N}^n$. Ce produit scalaire possède une propriété remarquable, à savoir qu'un opérateur de multiplication et l'opérateur de différentiation qui lui est associé sont adjoints l'un de l'autre pour ce produit scalaire. Nous utiliserons très souvent cette propriété pour effectuer nos calculs et nous l'appellerons la propriété « d'adjonction » du produit scalaire de Fischer.

On considère un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions holomorphes sur $\Omega$ tel qu'il existe un entier $N$ pour lequel $\mathcal{H}$ soit la somme directe du sous-espace constitué de ses polynômes de degré strictement inférieur à $N$ et de la clôture du sous-espace engendré par les polynômes homogènes dans $\mathcal{H}$ de degré supérieur ou égal à $N$. En particulier, les éléments polynomiaux de $\mathcal{H}$ forment un sous-espace dense dans $\mathcal{H}$. Ceci va nous permettre de ne travailler en quelque sorte qu'avec des polynômes.
Nous supposons également que les polynômes homogènes dans $\mathcal{H}$ de degré supérieur ou égal à $N$ sont orthogonaux entre eux dans $\mathcal{H}$.
Pour $d \geq N$, nous désignerons par $\mathcal{H}_d$ l'espace des polynômes homogènes de degré $d$ de $\mathcal{H}$. On suppose de plus que le produit scalaire de $\mathcal{H}$ est comparable au produit scalaire de Fischer sur les polynômes holomorphes homogènes de $\mathcal{H}$ de degré constant. Plus précisément, il existe une suite $\{h_d\}_{d\geq N}$ de nombres réels positifs ou nuls et des constantes strictement positives $C_1$ et $C_2$ telles que :

$$C_1 |\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}}| \leq h_d |\langle f,g\rangle_{\mathcal{F}}| \leq C_2 |\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}}|$$

pour tout $d \geq N$ et tous $f,g$ dans $\mathcal{H}_d$. Cette propriété est fondamentale. En effet, le produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ étant également comparable au produit scalaire de Fischer sur l'espace des polynômes holomorphes homogènes de degré constant, on obtient finalement que les produits scalaires de $\mathcal{H}$ et de $L^2(\Omega,\mu)$ sont comparables sur l'espace des polynômes holomorphes homogènes de degré constant. Ainsi, dans nos calculs, on pourra en quelque sorte « passer » d'un produit scalaire à l'autre.
Soit $\mathcal{H}^{(0,1)}$ l'espace de Hilbert des (0,1)-formes à coefficients dans $\mathcal{H}$. On munit $\mathcal{H}^{(0,1)}$ du produit scalaire naturellement associé à celui de $\mathcal{H}$.
On désigne par $\mathcal{D}om(S)$ le sous-espace dense de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ constitué des (0,1)-formes dont les coefficients sont des éléments polynomiaux de $\mathcal{H}$.

Nous appellerons opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, l'opérateur suivant :

$$S : \mathcal{D}om(S) \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$$

où pour $g \in \mathcal{D}om(S)$, $S(g)$ est l'unique élément de $L^2(\Omega,\mu)$ qui soit orthogonal dans $L^2(\Omega,\mu)$ à tous les polynômes holomorphes et qui vérifie l'équation $\overline{\partial}[S(g)] = g$, au sens des distributions.
Si $S$ est borné, le prolongement continu de $S$ correspond à l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ classique, lorsque ce dernier est bien défini sur $\mathcal{H}^{(0,1)}$.

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes en fonction des suites $\{m_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ et $\{h_d\}_{d\in\mathbb{N}}$, pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ dans $L^2(\Omega,\mu)$. Pour $d \in \mathbb{N}$ tel que $h_d > 0$, on pose :

$$U_d := \frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left[d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right].$$

Les résultats sont les suivants.

**Théorème (Théorèmes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3)**
*L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, $S : \mathcal{D}om(S) \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$, se prolonge par continuité à $\mathcal{H}^{(0,1)}$ tout entier si et seulement si*

$$\sup_{d\in\mathbb{N},\, h_d>0} U_d < +\infty.$$

*L'opérateur défini par densité $S : \mathcal{H}^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ est compact si et seulement si*

$$\lim_{d\to\infty,\, h_d>0} U_d = 0.$$

*Si $p > 0$ et*

$$\sum_{d\in\mathbb{N},\, h_d>0} \dim \mathcal{H}_d \ (U_d)^{\frac{p}{2}} < +\infty, \tag{1.2.1}$$

*alors l'opérateur $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$.*

*Réciproquement, supposons que soit $n = 1$ et $p > 0$, soit $n \geq 2$ et $p \geq 2$, et que de plus $S : \mathcal{H}^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ appartienne à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$, alors la propriété (1.2.1) est vraie.*

Dans le cas de plusieurs variables, l'absence de condition suffisante dans le cas $p < 2$ provient de l'utilisation du théorème spectral dans la preuve du résultat.

La démarche de la preuve est la suivante. Afin de pouvoir étudier la nature de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, nous devons obtenir une estimation suffisamment précise de $\langle S^*S(u),u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}$ pour tout vecteur unitaire $u$ de $\mathcal{D}om(S)$. Notre méthode consiste à trouver des sous-espaces de dimension finie invariants sous l'action de $S^*S$ et à établir des estimations uniformes de $\langle S^*S(u),u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}$ sur ces espaces stables. Pour ce faire, on commence par montrer que l'opérateur $S$ est bien défini et qu'on peut l'exprimer en termes d'opérateurs de Hankel. Plus précisément, on définit à l'aide de noyaux reproduisants d'espaces de polynômes holomorphes, une projection symétrique $P_\mu$ de l'espace des polynômes sur l'espace des polynômes holomorphes (voir la proposition 3.2.3). Si $\varphi$ est un polynôme holomorphe, alors l'opérateur de Hankel de symbole $\overline{\varphi}$ est l'opérateur qui à un polynôme $f$ associe :

$$H_{\overline{\varphi}}(f) := [I - P_\mu]\,(\overline{\varphi} f),$$

où $I$ est l'opérateur identité sur $L^2(\Omega,\mu)$.
On établit ensuite dans le lemme 3.2.3 que si $g = \sum_{j=1}^n g_j\, d\overline{z}_j \in \mathcal{D}om(S)$, alors :

$$S(g) = \sum_{j=1}^n H_{\overline{z}_j}(g_j).$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes dans $L^2(\Omega,\mu)$, l'expression du produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ en fonction du produit scalaire de Fischer sur les polynômes holomorphes de degré constant et la propriété « d'adjonction » du produit scalaire de Fischer, on obtient par le calcul :

$$H_{\overline{z}_j}(g) = \overline{z}_j g - \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\frac{\partial g}{\partial z_j}$$

pour tout polynôme holomorphe homogène $g$ de degré $d+1$ et tout entier $j$ tel que $1 \leq j \leq n$.

Ensuite, en se servant d'une expression de $S^*S$ en termes d'opérateurs de Hankel et de noyaux reproduisants (voir le lemme 3.2.6), de la propriété de comparabilité du produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ avec le produit scalaire de Fischer et de la propriété « d'adjonction » du produit scalaire de Fischer, on montre que $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ est stable par $S^*S$ pour tout $d \geq N$ et de plus, on donne une expression explicite de $S^*S$ sur des vecteurs unitaires particuliers de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$. Plus précisément, le résultat est le suivant :

**Lemme (Lemme 3.2.7)** *Soit $d \geq N$. Si $\mathcal{B}_d$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_d$, alors pour tout polynôme $f \in \mathcal{B}_d$ et tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a :*

$$\begin{aligned} S^*S(f d\overline{z}_k)(\xi) = \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \Bigg[ & \sum_{g\in\mathcal{B}_d} g(\xi)\langle f,g\rangle_{\mathcal{F}}\ d\overline{\xi}_k \\ & + \sum_{j=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{B}_d} g(\xi)\left(1 - \frac{m_d^2\,(n+d)}{m_{d-1}m_{d+1}(n+d-1)}\right)\left\langle \frac{\partial f}{\partial z_k},\frac{\partial g}{\partial z_j}\right\rangle_{\mathcal{F}}\ d\overline{\xi}_j \Bigg]. \end{aligned}$$

Grâce à cette dernière expression et à la propriété de comparabilité du produit scalaire de $\mathcal{H}$ avec le produit scalaire de Fischer, on obtient finalement les estimations suivantes (voir les lemmes 3.2.8 et 3.2.9):

$$\sum_{k=1}^{n}\langle S^*S(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \geq M_1\, U_d$$

pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et tout vecteur unitaire $f \in \mathcal{H}_d$ et

$$\langle S^*S(u),u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \leq M_2\, U_d$$

pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et tout vecteur unitaire $u \in \mathcal{H}_d^{(0,1)}$.

Enfin, on utilise le fait que $S^*S$ est stable sur $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ pour tout $d \geq N$ et les estimations obtenues pour conclure par des arguments classiques de la théorie des opérateurs d'espaces de Hilbert.

Le chapitre 3 se termine par des applications. Nos résultats s'appliquent en effet aux espaces des (0,1)-formes à coefficients dans l'un des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques, tels que les espaces de Bergman à poids, l'espace de Hardy, les espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, les espaces de Hardy-Sobolev ou l'espace invariant de Möbius.

### 1.2.3 Chapitre 4.

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et soit $\nu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. On désigne par $L^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $\nu$.

Soit $0 \leq m \leq 2$. On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_m$ constitué des fonctions holomorphes $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k$ sur $\mathbb{D}$ dont le développement en série entière satisfait :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|^2 k!\,(k+m)}{\Gamma(k+m+1)} < \infty.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}_m$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}_m} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k\,\overline{b_k}\,k!\,(k+m)}{\Gamma(k+m+1)} \quad \text{pour tous } f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k \text{ et } g = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k \text{ dans } \mathcal{H}_m.$$

Pour $1 < m \leq 2$, l'espace $\mathcal{H}_m$ est un espace de Bergman de poids $(1-|z|^2)^{m-2}\,d\nu(z)$ ou avec les notations précédentes, $\mathcal{H}_m = \mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D})$. Les paramètres $m = 1$ et $m = 0$ correspondent, respectivement, aux cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Hardy et l'espace de Dirichlet. Lorsque $0 < m < 1$, l'espace $\mathcal{H}_m$ coïncide avec un espace de Sobolev de fonctions holomorphes.

Soit $\mathcal{D}_m$ le sous-espace dense de $\mathcal{H}_m$ constitué de tous les polynômes holomorphes de $\mathcal{H}_m$. On désigne par $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman constitué des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{D})$ et on note $P$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, appelée projection de Bergman.

Étant donnée une fonction $f$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$ est l'opérateur $H_{\bar{f}}$ de $\mathcal{D}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ qui à un polynôme $g \in \mathcal{D}_m$, associe :

$$H_{\bar{f}}(g) := (I-P)(\bar{f}g),$$

où $I$ est l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{D})$.

Les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur les espaces de Bergman à poids de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ ont été étudiées par S. Axler ([3]), J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre ([2]) et S. Janson ([23]) dans le cas d'une variable, et par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson et J. Peetre ([1]), R. Wallsten ([45]), K. T. Hahn et E. H. Youssfi ([22]) et K. Zhu ([48],[47]) dans le cas de plusieurs variables.

Dans ce chapitre, nous poursuivons deux objectifs. Dans un premier temps, nous souhaitons savoir si, contrairement au cas des opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö de $L^2(\partial\mathbb{D})$ dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, il existe un phénomène de « coupure » pour les classes de Schatten. En particulier, nous cherchons à déterminer les classes de Schatten qui ne contiennent pas d'opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Dans un second temps, nous étudions le lien entre le comportement au bord du disque de la fonction $f$ et la nature de l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$. Plus précisément, nous souhaitons savoir pour quel type de fonction $f$, l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est borné ou compact et en ce qui concerne les classes de Schatten, nous désirons établir la connexion entre la croissance de $f$ et la taille des valeurs singulières de $H_{\bar{f}}$.

En fait, le cas des espaces de Bergman à poids, c'est-à-dire le cas où $1 < m \leq 2$, a déja été traité successivement par S. Axler ([3]), J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre ([2]) dans le cas $m = 2$ et par S. Janson ([23]) dans le cas général. Les résultats concernant le cas $1 < m \leq 2$ sont les suivants :

**Théorème (S. Axler, J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre et S. Janson)**
*$H_{\bar{f}}$ est borné si et seulement si*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}}|f^{'}(z)| < \infty\,;$$

*$H_{\bar{f}}$ est compact si et seulement si*

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}}|f^{'}(z)| = 0\,;$$

*pour $p > 0$, $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ contient un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$; pour $p > \frac{2}{4-m}$, $H_{\bar{f}}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si*

$$\int_{z\in\mathbb{D}} \Big((1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}}|f^{'}(z)|\Big)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

Le but de ce chapitre est de voir si on peut étendre ces résultats dans le cas $0 \leq m < 1$, sachant que ce cas est totalement différent du cas des espaces de Bergman à poids, puisque la norme des espaces $\mathcal{H}_m$ pour $0 \leq m < 1$, fait intervenir une norme $L^2$ de la dérivée.

Dans [3], S. Axler montre que la compacité et la continuité de $H_{\bar{f}}$ sont uniquement déterminées par l'action de $H_{\bar{f}}$ sur les noyaux reproduisants normalisés. Le même comportement apparaît dans le cas de l'espace de Hardy (voir [6] et [21]). Il est donc intéressant de savoir si, dans notre cas, ce phénomène a également lieu. Par conséquent, nous privilégierons toujours les preuves utilisant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur les noyaux reproduisants.

Le résultat principal de ce chapitre concerne le phénomène de « coupure ».

**Théorème (Théorème 4.1.1)** *Pour $0 \leq m \leq 1$ et $p > 0$, la $p^{\grave{e}me}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ contient un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$.*

Ce résultat implique en particulier que la $p^{\grave{e}me}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ contient un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial si et seulement si $p > \frac{1}{2}$ dans le cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Dirichlet, et si et seulement si $p > \frac{2}{3}$ dans le cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Hardy.

Pour démontrer ce résultat, on s'inspire de l'approche de K. Zhu dans [47]. Mais ici, nous perdons l'invariance sous l'action du groupe de Möbius. La preuve se décompose en deux étapes. On montre tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$. Ensuite, on raisonne par l'absurde. On montre que pour $p \leq \frac{2}{4-m}$, si la classe $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ contient un opérateur de Hankel non trivial, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_{\overline{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, ce qui est impossible.
Plus précisément, dans la première étape, on montre par le calcul que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}(z^d) = \lambda_d z^d$, avec $\lambda_d \simeq d^{m-4}$ (voir le lemme 4.2.3). On en déduit que l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ est dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$. Par conséquent, si $p > \frac{2}{4-m}$, alors il existe un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$.
Dans la deuxième étape, on considère pour $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$, l'espace suivant :

$$X_p := \{f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \text{ telle que } H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p\big(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\big)\},$$

muni de la quasi-norme

$$\|f\|_{X_p} = \|H_{\bar{f}}\|_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))} + |f(0)| \ \text{ pour tout } f \in X_p.$$

Montrer que pour $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$, il n'existe pas d'opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ revient à montrer que $X_p$ ne contient que les fonctions constantes.

Pour $\theta \in [0,2\pi]$, $q \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, soit $f^q_\theta$ la fonction définie par :

$$f^q_\theta(z) = e^{-iq\theta} f(e^{i\theta} z), \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Grâce à la complètude de $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, à la forme intégrale des opérateurs de Hankel et par estimation des valeurs singulières, on montre que l'espace $X_p$ possède les propriétés suivantes (voir les lemmes 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3) :

1. L'espace $(X_p, \|.\|_{X_p})$ est un espace quasi-Banach.
2. On a $f^q_\theta \in X_p$ et $\|f^q_\theta\|_{X_p} = \|f\|_{X_p}$, pour tous $f \in X_p$, $\theta \in [0,2\pi]$ et $q \in \mathbb{N}$.
3. L'application $T^q_f$ de $[0,2\pi]$ dans $X_p$, définie par $T^q_f(\theta) = f^q_\theta$, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, est continue pour chaque $f$ dans $X_p$.

On raisonne ensuite par l'absurde. Soit $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$. On suppose qu'il existe $f$ dans $X_p$ non constante telle que $f(0) = 0$. Si $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{k_0} \neq 0$. On a l'identité suivante :

$$a_{k_0} z^{k_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) e^{-ik_0\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\theta^{k_0}(z) d\theta.$$

En utilisant les propriétés 1, 2, et 3 de l'espace $X_p$ et l'égalité précédente, on obtient que $a_{k_0} z^{k_0} \in X_p$. D'où une contradiction. Donc $X_p$ ne contient pas de fonction non-constante.

Si l'on considère les opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö, on peut montrer par la même méthode que, pour tout $p > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $H_{\bar{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\partial\mathbb{D}))$. Par conséquent, il n'existe pas de phénomène de « coupure » pour les opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö sur $\mathcal{H}_m$.

Ensuite, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$ pour que l'opérateur $H_{\bar{f}}$ de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. De plus, dans le cas où $0 < m \leq 1$, nous donnons des conditions nécessaires sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ pour $p > \frac{2}{4-m}$.

Commençons par les résultats établissant des conditions nécessaires pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit borné, puis compact.

**Proposition (Propositions 4.1.1 et 4.1.2)** *Soient $0 < m \leq 1$ et $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Si l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}} : \mathcal{D}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ est borné alors :*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| < \infty.$$

*Si l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ est compact alors*

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1 - |z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| = 0.$$

Ces deux résultats se démontrent simultanément en utilisant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur les noyaux reproduisants normalisés de $\mathcal{H}_m$. On note $k_z^m$ le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_m$ et $\widetilde{k_z^m}$ le noyau reproduisant normalisé de $\mathcal{H}_m$. D'après des arguments classiques d'analyse fonctionnelle, on obtient que si $H_{\bar{f}}$ est borné, alors

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} < \infty$$

et si $H_{\bar{f}}$ est compact, alors

$$\lim_{|z|\to 1^-} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} = 0.$$

On pose
$$j_z(w) = \frac{\overline{w}}{(1 - z\overline{w})^{3-m}} \quad \text{et} \quad \widetilde{j_z}(w) = \frac{j_z(w)}{\|j_z\|_{L^2(\mathbb{D})}}.$$
En considérant le produit scalaire $\left|\langle \widetilde{j_z}, H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right|$, en dérivant la formule de reproduction dans l'espace de Bergman et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on parvient à montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :
$$(1 - |z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| \leq C\, \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D},$$
ce qui donne les résultats.

Dans le cas $m = 0$, nous avons essayé d'appliquer cette méthode. L'expression de la fonction $j_z$ contenait alors un logarithme pour compenser celui provenant du noyau de l'espace de Dirichlet. La présence de ce logarithme complique les calculs et nous n'avons pas pu estimer correctement $\|j_z\|^2_{L^2(\mathbb{D})}$, d'où l'absence de résultat dans le cas $m = 0$.

Les résultats concernant les classes de Schatten font intervenir les espaces $B_p^m$ définis comme suit.
Pour $0 < m \leq 1$ et $p > \frac{2}{4-m}$, on désigne par $B_p^m$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ vérifiant :
$$\|f\|^p_{B_p^m} = \int_{z\in\mathbb{D}} \left((1 - |z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)|\right)^p \frac{1}{(1 - |z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

De plus, on note $B_2^0$ l'espace constitué des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ vérifiant :
$$\|f\|^2_{B_2^0} = \int_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^2 \ \ln\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right) |f'(z)|^2\, d\nu(z) < \infty.$$

Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.

**Théorème (Théorème 4.1.2)** *Soient* $0 \leq m \leq 1$ *et* $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ *telle que l'opérateur* $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ *soit compact. L'opérateur* $H_{\bar{f}}$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si* $f$ *appartient à* $B_2^m$.

Ce résultat est établi en utilisant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur une base orthonormale particulière de $\mathcal{H}_m$. Soit $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, telle que $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \to L^2(\mathbb{D})$ soit compact. On note pour $d \in \mathbb{N}$, $u_d(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(d+m)}{d!}}\, z^d$. La famille $\{u_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_m$. Donc
$$\|H_{\bar{f}}\|^2_{S_2(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))} = \sum_{d\in\mathbb{N}} \langle H^*_{\bar{f}} H_{\bar{f}}(u_d), u_d\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

De plus, en utilisant un développement en série entière, on a

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{B_2^m} &= \int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 \left[\sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!\,\Gamma(m)}|z^d|^2\right] |f^{'}(z)|^2 d\nu(z)\\ &\simeq \sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!} \int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 |z^d f^{'}(z)|^2 d\nu(z).\end{aligned}$$

Or, on obtient par le calcul :

$$\begin{aligned}\langle H^*_{\bar f} H_{\bar f}(u_d),u_d\rangle_{\mathcal{H}_m} &= \frac{\Gamma(d+m)}{d!}\left[\sum_{p\le d}|b_p|^2\frac{1}{p+d+1}\frac{p^2}{(d+1)^2} + \sum_{p>d}|b_p|^2\frac{1}{p+d+1}\right]\\ &\simeq \frac{\Gamma(d+m)}{d!}\int_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|z^d f^{'}(z)|^2 d\nu(z),\end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat concernant la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

On voit que dans le cas $m = 0$, la condition nécessaire et suffisante fait intervenir un terme $\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$ qui provient du noyau de Dirichlet. Ce résultat nous laisse à penser que les bonnes caractérisations pour l'espace de Dirichlet seraient :

$H_{\bar f}$ est borné si et seulement si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}|f^{'}(z)| < \infty;$$

$H_{\bar f}$ est compact si et seulement si

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}|f^{'}(z)| = 0;$$

Pour $p > \frac{2}{4-m}$, l'opérateur $H_{\bar f}$ est dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si

$$\int_{z\in\mathbb{D}}\left((1-|z|^2)^2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}|f^{'}(z)|\right)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}d\nu(z) < \infty.$$

Enfin, sous les hypothèses $0 < m \le 1$ et $p > \frac{2}{4-m}$, nous obtenons une condition nécessaire sur $f$ pour que $H_{\bar f}$ appartienne à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$.

**Proposition (Proposition 4.1.3)** *Soient $0 < m \le 1$ , $p > \frac{2}{4-m}$ et $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Si l'opérateur $H_{\bar f} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ appartient à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, alors $f$ appartient à l'espace $B_p^m$.*

Pour la preuve de ce résultat, on distingue le cas $p \ge 2$ du cas $\frac{2}{4-m} < p < 2$.

Afin de démontrer le résultat dans le cas $p \geq 2$, nous allons adopter l'approche de M. Smith dans [44]. L'intérêt de cette preuve est qu'elle met en évidence l'importance de l'action de $H_{\bar{f}}$ sur les noyaux reproduisants et dérivés de $\mathcal{H}_m$.

Soit $0 < m \leq 1$. On note $\dot{k}_z^m = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k_z^m)$ le noyau dérivé de $\mathcal{H}_m$ et $\widetilde{\dot{k}_z^m}$ le noyau dérivé normalisé de $\mathcal{H}_m$.
En utilisant que pour $g \in \mathcal{H}_m$ :

$$\|g\|^2_{\mathcal{H}_m} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z) + \frac{m}{\Gamma(m)} \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 (1-|z|^2)^{m-1} d\nu(z)$$

et la caractérisation d'un opérateur de Hilbert-Schmidt en terme d'action sur les bases orthonormales, on parvient à estimer la norme $\mathcal{S}_2$ d'un opérateur de Hilbert-Schmidt $T$ sur $\mathcal{H}_m$ en fonction de $T(k_z^m)$ et de $T(\dot{k}_z^m)$.

**Lemme (Lemme 4.6.1)** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Si $T$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}_m$ dans $H$, alors :*

$$\begin{aligned} \|T\|^2_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,H)} = & \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_{\mathbb{D}} \|T(\dot{k}_z^m)\|^2_H (1-|z|^2)^m d\nu(z) \\ & + \frac{m}{\Gamma(m)} \int_{\mathbb{D}} \|T(k_z^m)\|^2_H (1-|z|^2)^{m-1} d\nu(z). \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le fait que l'étude de l'appartenance d'un opérateur $T$ à une classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, où $p \geq 1$, peut se ramener à celle de l'appartenance de l'opérateur positif $(T^*T)^{\frac{p}{2}}$ à la classe de Schatten $\mathcal{S}_1$, le théorème spectral et le théorème précédent, on établit des conditions nécessaires pour qu'un opérateur défini sur $\mathcal{H}_m$ appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten dans le cas $p \geq 2$.

**Lemme (Lemme 4.6.3)** *Soit $2 \leq p < +\infty$ et soit $H$ un espace de Hilbert. Si $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)$, alors :*

$$\int_{\mathbb{D}} \|T\widetilde{\dot{k}_z^m}\|^p_H \frac{1}{(1-|z|^2)^2} d\nu(z) + \int_{\mathbb{D}} \|T\widetilde{k_z^m}\|^p_H \frac{1}{(1-|z|^2)} d\nu(z) \lesssim \|T\|^p_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)}.$$

On déduit de ce dernier résultat que pour $p \geq 2$, si $H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, alors :

$$\int_{\mathbb{D}} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{\dot{k}_z^m})\|^p_{L^2(\mathbb{D})} \frac{1}{(1-|z|^2)^2} d\nu(z) < \infty.$$

Or, en reprenant la même méthode que celle utilisée dans la preuve des résultats concernant les conditions nécessaires pour la continuité et la compacité, on obtient

$$(1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| \lesssim \|H_{\bar{f}}(\widetilde{\dot{k}_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})},$$

ce qui nous permet de conclure.

Cette méthode peut s'étendre au cas $m = 0$. Le résultat est le suivant : pour $p \geq 2$, si $H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_0, L^2(\mathbb{D}))$, alors :

$$\int_{z\in\mathbb{D}} \left((1-|z|^2)^2|f'(z)|\right)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

Mais d'après ce que nous avons obtenu dans le cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt, cette condition ne semble pas optimale.

Pour prouver la proposition 4.1.3 dans le cas $\frac{2}{4-m} < p < 2$, nous allons reprendre l'approche de S. Janson dans [23], qui est basée sur l'étude du petit opérateur de Hankel associé à $H_{\bar{f}}$.

Plus précisément, soient $0 < m \leq 1$, $\frac{2}{4-m} < p < 2$ et une fonction $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$ dans l'espace de Bergman. On sait que si $H_{\bar{f}}$ est dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, alors le petit opérateur de Hankel $\widetilde{H_{\bar{f}}}$ de symbole $\bar{f}$ appartient aussi à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ (voir [23]). En calculant les éléments matriciels de $\widetilde{H_{\bar{f}}}$ relativement aux bases orthonormales naturelles de $\mathcal{H}_m$ et de $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$ et en utilisant la formule de Stirling, il vient que $\widetilde{H_{\bar{f}}}$ est dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si la matrice

$$\left((n+1)^{\frac{m-1}{2}}(d+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n+d+1}b_{n+d}\right)_{(n,d)\ \in\mathbb{N}^2}$$

définit un opérateur qui appartient à $\mathcal{S}_p(l^2, l^2)$.
Or, d'après un résultat de V. V. Peller ([33] et [35]) et S. Semmes ([43]), la propriété précédente a lieu si et seulement si $f$ appartient à $B_p^m$. Ceci complète la preuve du résultat.

## 1.3 Conclusion

Suite aux travaux menés dans cette thèse, nous proposons quelques pistes de recherche susceptibles d'en constituer un prolongement naturel.
Dans le dernier chapitre, il manque bien entendu les résultats concernant les conditions suffisantes dans le cas $0 < m \leq 1$. Nous avons déjà des conditions nécessaires et suffisantes dans le cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Si on parvient à montrer que les conditions nécessaires que nous avons établies pour la continuité sont également suffisantes, on peut obtenir par interpolation des conditions nécessaires et suffisantes pour l'appartenance aux classes de Schatten $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ dans le cas $p \geq 2$. De plus, en utilisant le fait que pour tout polynôme holomorphe $f$, l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ appartient au sous-espace fermé des opérateurs compacts de l'espace des opérateurs bornés, on peut déduire facilement les conditions suffisantes pour la compacité de celles pour la continuité. Par conséquent, une grande partie des conditions suffisantes peut être obtenue à partir des conditions suffisantes pour la continuité. Or, nous rencontrons certaines difficultés pour montrer que les

conditions nécessaires pour la continuité sont également suffisantes. La difficulté principale vient du fait que la norme des espaces $\mathcal{H}_m$ pour $0 \leq m < 1$, fait intervenir une norme $L^2$ de la dérivée qui est prépondérante sur la norme $L^2$ de la fonction. En effet, l'outil classique pour établir les conditions suffisantes dans le cas $1 < m \leq 2$, est l'utilisation de l'expression intégrale des opérateurs de Hankel. Plus précisément, pour toute fonction $f$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, on a :

$$H_{\bar{f}}\,(g)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(w)}}{(1 - z\overline{w})^2}\, g(w)\, d\nu(w) \tag{1.3.2}$$

pour toute fonction $g$ dans $\mathcal{H}_m$.
Par conséquent, on peut représenter $H_{\bar{f}}$ comme un opérateur intégral, qui est en fait défini sur l'espace $L^2(\mathbb{D})$ tout entier. Notons $\mathcal{B}_\infty^m$ l'espace constitué des fonctions $f$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telles que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| < \infty.$$

Dans les articles précédents concernant le cas des espaces de Bergman à poids $\mathcal{A}^2_{m-2}\,(\mathbb{D})$, les auteurs montrent en fait que si $f$ appartient à $\mathcal{B}_\infty^m$, alors l'opérateur intégral associé à $H_{\bar{f}}$ envoie continûment $L^2_{m-2}\,(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Si on voulait reprendre cette méthode, il faudrait pouvoir majorer uniformément pour tout $g$ dans $\mathcal{H}_m$, la norme dans $L^2(\mathbb{D})$ de l'intégrale (1.3.2) par la norme $L^2$ adéquate de la dérivée de $g$. Or, cette intégrale ne faisant pas intervenir la fonction $g'$, cela devient beaucoup plus difficile.
Une première idée est de reproduire $g$ dans $\mathcal{H}_m$ afin de faire apparaître la fonction $g'$ dans l'intégrale (1.3.2). On obtient alors :

$$\|H_{\bar{f}}(g)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \simeq \left| \left\langle g, \|H_{\bar{f}}(\dot{k}_z^m)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \right\rangle_{\mathcal{H}_m} \right|,$$

et on espère conclure en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Bien qu'on parvienne à estimer de façon précise $\left\| \|H_{\bar{f}}(\dot{k}_z^m)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \right\|_{\mathcal{H}_m}$, la majoration par l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trop grossière pour pouvoir aboutir.
Une autre idée serait de voir si on peut procéder à une intégration par parties sur les disques de rayon $r < 1$ et passer à la limite en faisant $r \to 1^-$. Dans le cas où on obtiendrait un opérateur intégral faisant intervenir la dérivée de $g$, on pourrait ensuite considérer cet opérateur sur l'espace de Sobolev associé à $\mathcal{H}_m$ pour $0 < m \leq 1$. Enfin, en utilisant la même méthode d'interpolation que celle utilisée par S. Janson dans [23], on pourrait peut-être obtenir le résultat souhaité.

# Chapitre 2

# Opérateurs d'espaces de Hilbert et classes de Schatten

Dans ce chapitre, nous rappelons certains résultats sur les opérateurs d'espaces de Hilbert. Ils seront utilisés dans les chapitres 3 et 4. La référence principale de ce chapitre est le livre de K. Zhu [49]. Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous donnons la définition d'un opérateur adjoint au sens de Von Neumann et rappelons la définition d'un opérateur auto-adjoint. Nous énonçons également le théorème spectral ainsi qu'un théorème de décomposition spectrale pour les opérateurs auto-adjoints. Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons aux opérateurs compacts et notamment à l'existence d'une décomposition de Schmidt pour ces opérateurs. De plus, nous donnons une caractérisation de la compacité spécifique aux opérateurs auto-adjoints. Dans le troisième paragraphe, nous définissons tout d'abord la suite des valeurs singulières d'un opérateur compact et étudions les propriétés de cette suite. Ensuite, nous donnons la définition des classes de Schatten et énonçons plusieurs résultats permettant de caractériser les éléments d'une classe de Schatten suivant leur action sur les bases orthonormales. Enfin, nous discutons de la structure topologique des classes de Schatten.

## 2.1 Opérateurs adjoints et théorème spectral

Par la suite, nous supposerons toujours que les espaces de Hilbert considérés sont des espaces de Hilbert complexes et séparables. De plus, pour un espace de Hilbert $H$, nous noterons $\langle \cdot,\cdot \rangle_H$ le produit scalaire de $H$ et $\|.\|_H$ la norme associée.

Soient deux espaces de Hilbert $H$ et $G$. On note $(T, \mathcal{D}om(T))$ tout opérateur de $H$ dans $G$, où $\mathcal{D}om(T)$ désigne le domaine de $T$.

La donnée de $\mathcal{D}om(T)$ est essentielle dans la définition de l'opérateur $T$. En effet, si on restreint ce domaine ou si on l'agrandit, on modifie les propriétés de $T$.

Dans le cas où $\mathcal{D}om(T)$ est l'espace de Hilbert $H$ tout entier, on convient de ne pas spécifier $\mathcal{D}om(T)$.

De plus, si $\mathcal{D}om(T)$ est un sous-espace dense dans $H$ et si $T$ est borné sur $\mathcal{D}om(T)$ pour la norme induite par celle de $H$, alors il existe une unique application linéaire continue de $H$ dans $G$ qui prolonge $T$. On désignera de nouveau par $T$ ce prolongement continu.

Nous allons maintenant rappeler la définition de l'opérateur adjoint au sens de Von Neumann d'un opérateur non nécessairement borné.

Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $(T,\mathcal{D}om(T))$ un opérateur de $H$ dans $G$ tel que $\mathcal{D}om(T)$ est un sous-espace dense dans $H$. On considère l'ensemble des points $y \in G$ tels que la forme linéaire $x \mapsto \langle Tx,y\rangle_G$ est continue sur $\mathcal{D}om(T)$ pour la norme induite par celle de $H$. Par densité de $\mathcal{D}om(T)$ dans $H$, il vient que pour un tel point $y$, cette forme linéaire se prolonge par continuité à l'espace $H$ tout entier. Par conséquent, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de $H$, noté $T^*y$, déterminé par les égalités suivantes :

$$\langle Tx,y\rangle_G = \langle x,T^*y\rangle_H \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}om(T).$$

De cette clause d'unicité, on déduit aisément que $T^*$ est un opérateur, ce qui conduit à la définition suivante :

**Définition 2.1.1.** Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $(T,\mathcal{D}om(T))$ un opérateur de $H$ dans $G$ tel que $\mathcal{D}om(T)$ est un sous-espace dense dans $H$.
On pose :

$$\mathcal{D}om(T^*) := \{y \in G \text{ tel que } x \mapsto \langle Tx,y\rangle_G \text{ est borné de } (\mathcal{D}om(T),\|.\|_H) \text{ dans } \mathbb{C}\}.$$

On appelle *opérateur adjoint* de $T$ l'opérateur $T^* : Dom(T^*) \longrightarrow H$ défini par :

$$\langle Tx,y\rangle_G = \langle x,T^*y\rangle_H$$

pour tout $x \in \mathcal{D}om(T)$ et tout $y \in \mathcal{D}om(T^*)$.

Si $T$ est un opérateur linéaire borné de $H$ dans $G$, alors $T^*$ a pour domaine $G$ et $T^*$ est également borné.

Nous renvoyons le lecteur à [9] pour plus d'informations sur cette première partie du paragraphe 2.1 concernant les opérateurs adjoints au sens de Von Neumann.

Désormais, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux opérateurs adjoints d'opérateurs bornés et aux opérateurs auto-adjoints.
Les opérateurs que nous considérons maintenant ont pour domaine l'espace de Hilbert de départ tout entier. Par conséquent on ne précise plus le domaine des opérateurs dont nous parlons.

Pour deux espaces de Hilbert $H$ et $G$, on désigne par $\mathcal{L}(H,G)$ l'espace des opérateurs bornés de $H$ dans $G$. On munit cet espace de la norme usuelle $\|.\|$, définie par :

$$\|T\| = \sup_{x\in H, \|x\|_H=1} \|T(x)\|_G,$$

pour tout opérateur $T$ appartenant à $\mathcal{L}(H,G)$.

Les propositions suivantes relient la continuité d'un opérateur à celle de son opérateur adjoint.

**Proposition 2.1.1.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et $T$ un opérateur de $H$ dans $G$. L'opérateur $T$ est borné si et seulement si son opérateur adjoint $T^*$ est borné. De plus, si $T$ est borné, on a $\|T\| = \|T^*\|$.*

**Proposition 2.1.2.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert. Soit $T$ un opérateur de $H$ dans $G$. L'opérateur $T$ est borné si et seulement si l'opérateur $T^*T$ est borné. De plus, si $T$ est borné, on a $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.*

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement aux opérateurs auto-adjoints.

Soit $H$ un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur borné $T$ de $H$ dans $H$ est *auto-adjoint* si $T^* = T$.

Par exemple, si $H$ et $G$ sont deux espaces de Hilbert et si $T$ est un opérateur borné de $H$ dans $G$, alors l'opérateur $T^*T$ est un opérateur auto-adjoint.

La proposition suivante fournit un exemple important d'opérateurs auto-adjoints.

**Proposition 2.1.3.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Si $T$ est un opérateur positif de $H$ dans $H$, c'est-à-dire vérifiant*

$$\langle Tx,x\rangle_H \geq 0 \quad \textit{pour tout } x \in H,$$

*alors $T$ est un opérateur auto-adjoint.*

Si $T$ est auto-adjoint sur $H$, il est facile de voir que $\langle Tx,x\rangle_H$ est réel pour tout $x \in H$. De plus, on a :

**Proposition 2.1.4.** *Si $T$ est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $H$, alors*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx,x\rangle_H| : \|x\|_H = 1\}.$$

Définissons maintenant le spectre d'un opérateur borné. Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H,H)$. Le *spectre* de l'opérateur $T$, noté $\sigma(T)$, est le sous-ensemble des nombres complexes suivant :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ n'est pas inversible}\},$$

où $I$ est l'opérateur identité sur $H$.

La connaissance du spectre de $T$ fournit beaucoup d'informations sur l'opérateur $T$. Le spectre $\sigma(T)$ est mieux compris dans le cas où $T$ est un opérateur auto-adjoint.

**Théorème 2.1.1.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Supposons que $T$ soit un opérateur auto-adjoint sur $H$. Pour toute fonction $f$ continue sur $\sigma(T)$, il existe un unique opérateur $f(T)$ sur $H$, satisfaisant la condition suivante :*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

*De plus, on a les propriétés suivantes :*

*i) l'application $f \mapsto f(T)$ est linéaire;*
*ii) si $f(z) = z^n$, alors $f(T) = T^n$.*

Ce théorème est parfois appelé *théorème spectral* pour les opérateurs auto-adjoints. Une des nombreuses conséquences de ce théorème est que, si $T$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\sigma(T)$ est constitué de nombres réels, et si de plus $T$ est positif, alors $\sigma(T)$ est constitué de nombres positifs ou nuls.

Pour terminer, citons un théorème sur la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints.

**Théorème 2.1.2.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Supposons que $T$ soit un opérateur auto-adjoint sur $H$. Alors pour tout nombre réel $t$, il existe une projection $E_t$ satisfaisant les conditions suivantes :*

*i) si $t \leq s$, $E_t \leq E_s$ (c'est-à-dire l'image de $E_t$ est contenue dans celle de $E_s$);*
*ii) $E_t = 0$ pour tout $t < -\|T\|_{\mathcal{L}(H,H)}$ et $E_t = I$ pour tout $t > \|T\|_{\mathcal{L}(H,H)}$;*
*iii) $T = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t$, au sens de la convergence en norme des sommes de Riemann;*
*iv) si $f$ est une fonction continue sur le spectre $\sigma(T)$ de $T$, alors $f(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dE_t$.*

*L'application $E$ est la mesure spectrale de l'opérateur $T$.*

Le théorème 2.1.2 implique le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.1.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Supposons que $T$ est un opérateur auto-adjoint sur $H$ et notons $E$ sa mesure spectrale. Pour tout $p \geq 1$, on a :*

$$\langle T^p x, x\rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p d\langle E_t x, x\rangle_H \text{ pour tout } x \in H.$$

## 2.2 Opérateurs compacts

Commençons par rappeler la définition d'un opérateur compact.

Soient $(\mathbb{E}, \|\ \|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|\ \|_{\mathbb{F}})$ deux espaces vectoriels normés. On note $\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}}$ la boule unité fermée de $\mathbb{E}$, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}} := \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{E}} \leq 1\}$.

Un opérateur linéaire $T$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est un *opérateur compact* si $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}})$ est relativement compact dans $\mathbb{F}$.
Un opérateur compact est borné et on peut citer comme exemple simple d'opérateurs compacts les opérateurs de rang fini.

Maintenant, plaçons-nous dans le cadre des espaces de Hilbert.
La proposition suivante relie la compacité d'un opérateur $T$ à celle de l'opérateur $T^*T$.

**Proposition 2.2.1.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert. Soit $T$ un opérateur borné de $H$ dans $G$. L'opérateur $T$ est compact si et seulement si l'opérateur $T^*T$ est compact.*

Le résultat suivant est fondamental. Il montre qu'un opérateur auto-adjoint compact est diagonalisable dans une base orthonormale convenablement choisie.

**Théorème 2.2.1.** *Si $T$ est un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert $H$, alors il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $\{\lambda_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $0$ et une suite orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H$, telles que :*

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(T)\langle x,e_n\rangle_H \; e_n \quad \textit{pour tout } x \in H.$$

Plus précisément, chaque $\lambda_n(T)$ est la valeur propre associée au vecteur propre $e_n$ de l'opérateur $T$.

**Corollaire 2.2.1.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert. Si $T$ est un opérateur compact de $H$ dans $G$, alors il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $0$, une suite orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H$ et une suite orthonormale $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $G$, telles que :*

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T)\langle x,e_n\rangle_H \; f_n \quad \textit{pour tout } x \in H.$$

*La décomposition ci-dessus est appelée décomposition de Schmidt de l'opérateur $T$.*

Plus précisément, on a :

$$s_n(T) = [\lambda_n(T^*T)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.1}$$

Ainsi, la suite $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans toute décomposition de Schmidt d'un opérateur compact $T$ est unique.

Pour finir, nous donnons une caractérisation de la compacité spécifique aux opérateurs auto-adjoints.

**Proposition 2.2.2.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $T$ un opérateur auto-adjoint sur $H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i) $T$ est compact;*

*ii) pour toute suite orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs dans $H$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle Te_n, e_n\rangle_H = 0;$$

*iii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une projection orthogonale $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(H,H)$ de codimension finie, telle que $\|P_\varepsilon T P_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.*

*Preuve.* Se référer à [30]. □

## 2.3 Classes de Schatten

Dans cette section nous allons nous intéresser au comportement asymptotique des valeurs singulières d'un opérateur compact et aux classes de Schatten.

Commençons tout d'abord par définir la suite des valeurs singulières d'un opérateur compact.

**Définition 2.3.1.** Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $T$ un opérateur compact de $H$ dans $G$. La suite $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans toute décomposition de Schmidt de l'opérateur $T$ est appelée *suite des valeurs singulières* associée à $T$. Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n(T)$ est appelée la $n^{\text{ème}}$ valeur singulière de l'opérateur $T$.

**Proposition 2.3.1.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert. Pour un opérateur compact $T$ de $H$ dans $G$, on a :*

*i) $s_0(T) = \|T\|$;*

*ii) $s_n(\lambda T) = |\lambda| s_n(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Preuve.* Se référer à [15]. □

La proposition suivante donne une interprétation géométrique des valeurs singulières. Plus précisément, la $n^{\text{ème}}$ valeur singulière d'un opérateur compact $T$ correspond à la distance de $T$ à l'espace des opérateurs de rang inférieur ou égal à $n$. Cette propriété est souvent utilisée pour estimer les valeurs singulières.

**Proposition 2.3.2.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $T$ un opérateur compact de $H$ dans $G$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$s_n(T) = \inf_{\substack{\mathcal{L}(H,G),\\ \text{rang(A)} \leq \text{n}}} \|T - A\|.$$

De cette propriété on déduit la proposition suivante :

**Proposition 2.3.3.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soient $T_1$ et $T_2$ deux opérateurs compacts de $H$ dans $G$. Alors pour tous $m_1$, $m_2$ dans $\mathbb{N}$, on a :*

$$s_{m_1+m_2}(T_1+T_2) \leq s_{m_1}(T_1) + s_{m_2}(T_2).$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux classes de Schatten et à leurs propriétés.
Commençons par donner la définition des classes de Schatten.

**Définition 2.3.2.** Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $0 < p < \infty$. On définit la $p^{ème}$ *classe de Schatten* de $H$ dans $G$, notée $\mathcal{S}_p(H,G)$, comme l'ensemble de tous les opérateurs compacts $T$ de $H$ dans $G$ tels que la suite des valeurs singulières de $T$, $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$, vérifie :

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p(H,G)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[s_n(T)]^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Autrement dit, pour $p > 0$, un opérateur compact $T$ de $H$ dans $G$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(H,G)$ si et seulement si la suite $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est $p$-sommable.

Par exemple, d'après la proposition 2.3.2, les opérateurs de rang fini appartiennent à la $p^{ème}$ classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, pour tout $p > 0$.

Usuellement, la classe $\mathcal{S}_1$ est appelée *classe des opérateurs à trace.* Plus précisément, si $T \in \mathcal{S}_1$, alors la trace de $T$, notée $tr(T)$, est définie par :

$$tr(T) := \|T\|_{\mathcal{S}_1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T).$$

De même, la classe $\mathcal{S}_2$ est plus communément appelée *classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.*

Les valeurs singulières étant souvent difficiles à déterminer, nous cherchons désormais à caractériser les éléments des classes de Schatten suivant leur action sur des bases orthonormales.

**Théorème 2.3.1.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Si $T$ est un opérateur compact positif de $H$ dans $H$, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Te_n, e_n\rangle_H,$$

*pour toute base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$.*

Par conséquent, si $T$ est un opérateur compact positif sur $H$, alors $T$ appartient à $\mathcal{S}_1(H,H)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Te_n,e_n\rangle_H < \infty$.

Le théorème suivant, qui découle du théorème 2.3.1, nous permet de définir autrement la trace d'un opérateur appartenant à la classe $\mathcal{S}_1$.

**Théorème 2.3.2.** *Soit $H$ un espace de Hilbert. Si $T \in \mathcal{S}_1(H,H)$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Te_n,e_n\rangle_H$ converge absolument pour toute base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$. De plus, la somme est indépendante du choix de la base orthonormale et est égale à la trace de $T$.*

Ensuite, le théorème 2.3.3 ramène l'étude de l'appartenance d'un opérateur positif $T$ à une classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, où $p > 0$, à celle de l'appartenance de l'opérateur $T^p$ à la classe de Schatten $\mathcal{S}_1$. L'intérêt de ce résultat est que l'appartenance d'un opérateur à la classe des opérateurs à trace est totalement caractérisée par son action sur les bases orthonormales.

**Théorème 2.3.3.** *Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $p > 0$. Si $T$ est un opérateur compact positif de $H$ dans $H$, alors $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$ si et seulement si $T^p \in \mathcal{S}_1(H,H)$. De plus, on a*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,H)} = \|T^p\|_{\mathcal{S}_1(H,H)}.$$

De même, le théorème 2.3.4 ramène l'étude de l'appartenance d'un opérateur $T$ à une classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, où $p \geq 1$, à celle de l'appartenance de l'opérateur $(T^*T)^{\frac{p}{2}}$ à la classe de Schatten $\mathcal{S}_1$.

**Théorème 2.3.4.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $1 \leq p < \infty$. Si $T$ est un opérateur compact de $H$ dans $G$, alors $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$ si et seulement si $(T^*T)^{\frac{p}{2}} \in \mathcal{S}_1(H,H)$. De plus, si $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$, on a :*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,G)} = \|(T^*T)^{\frac{p}{2}}\|_{\mathcal{S}_1(H,H)}.$$

**Corollaire 2.3.1.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $1 \leq p < \infty$. Supposons que $T$ soit un opérateur de $H$ dans $G$. Alors $T$ appartient à $\mathcal{S}_p(H,G)$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}e_n,e_n\rangle_H < \infty$ pour toute base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$. De plus, si $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$, on a:*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,G)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}e_n,e_n\rangle_H$$

*pour toute base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$.*

Autrement dit, pour $p \geq 1$, l'appartenance d'un opérateur $T$ à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$ est totalement caractérisée par l'action de $(T^*T)^{\frac{p}{2}}$ sur les bases orthonormales.

Pour finir, nous allons étudier la structure topologique des classes de Schatten. Nous allons voir que les structures diffèrent dans les cas $p \geq 1$ et $0 < p < 1$.

**Proposition 2.3.4.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $p \geq 1$. L'espace $\big(\mathcal{S}_p(H,G),\|.\|_{\mathcal{S}_p(H,G)}\big)$ est un espace de Banach.*

Il est évident que $\|.\|_{\mathcal{S}_p(H,G)}$ n'est pas une norme sur $\mathcal{S}_p(H,G)$ lorsque $0 < p < 1$. Néanmoins, pour $0 < p < 1$, l'espace $\mathcal{S}_p(H,G)$ est un espace métrique complet, qui possède une autre structure que celle d'un espace normé, à savoir une structure d'espace quasi-Banach.

Commençons par rappeler la définition d'une quasi-norme et d'un espace quasi-Banach.

**Définition 2.3.3.** Soit $X$ un espace vectoriel complexe. Une application $A$ de $X$ dans $\mathbb{R}^+$ est appelée *quasi-norme* si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $A(x) = 0$ implique $x = 0$ pour tout $x \in X$.
ii) $A(\alpha x) = |\alpha| A(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $x \in X$.
iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que $A(x_1 + x_2) \leq C[A(x_1) + A(x_2)]$ pour tous $x_1, x_2 \in X$ .

En outre, on dira que $A$ est une *p-norme*, pour $0 < p \leq 1$, si on a de plus :

$$[A(x_1 + x_2)]^p \leq [A(x_1)]^p + [A(x_2)]^p \quad \text{pour tous } x_1, x_2 \text{ dans } X.$$

Bien sûr, si $p = 1$, alors $A$ est une norme.

**Définition 2.3.4.** Soit $X$ un espace vectoriel complexe muni d'une quasi-norme $A$. Si $A$ définit sur $X$ une topologie métrisable complète, alors on dira que $X$ est un *espace quasi-Banach*. Si de plus $A$ est une $p$-norme, pour $0 < p \leq 1$, on dira que $X$ est un *espace quasi-Banach p-normé*.

**Théorème 2.3.5.** *Soient $H$ et $G$ deux espaces de Hilbert et soit $0 < p < 1$. L'espace $(\mathcal{S}_p(H,G), \|.\|_{\mathcal{S}_p(H,G)})$ est un espace quasi-Banach p-normé.*

*Preuve.* Se référer à [24] et [38]. □

# Chapitre 3

# Propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$

L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ classique est l'opérateur qui, à chaque $(0,1)-$forme à coefficients $L^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue, associe la solution $L^2$ de l'équation du $\overline{\partial}$ qui est orthogonale à l'espace de Bergman des fonctions holomorphes de carré intégrable. Nous nous intéressons ici au cas plus général où l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est défini sur certains espaces de Hilbert $\mathcal{H}^{(0,1)}$ de (0,1)-formes à coefficients holomorphes.

Dans ce chapitre, $\Omega$ désigne une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$ ou l'espace $\mathbb{C}^n$ tout entier. Considérons l'espace $L^2(\Omega,\mu)$ constitué des fonctions de carré intégrable par rapport à une mesure $\mu$ invariante par rotation sur $\Omega$. L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, défini de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ dans $L^2(\Omega,\mu)$, correspond à l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ classique lorsque $\mathcal{H}$ est l'espace de Bergman et $\mu$ la mesure Lebesgue. Nous nous proposons d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, en fonction notamment des moments de la mesure $\mu$, pour que cet opérateur soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ dans $L^2(\Omega,\mu)$. Ces résultats s'appliquent en particulier lorsque l'espace $\mathcal{H}^{(0,1)}$ est l'espace des $(0,1)-$formes à coefficients dans l'un des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques, tels que les espaces de Bergman à poids, l'espace de Hardy, les espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, les espaces de Hardy-Sobolev ou l'espace invariant de Möbius.

## 3.1 Introduction et énoncé des principaux théorèmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$, défini par $\langle z,w\rangle := \sum_{j=1}^n z_j\overline{w}_j$ pour tous vecteurs $z = (z_1,\ldots,z_n)$, $w = (w_1,\ldots,w_n)$ dans $\mathbb{C}^n$. La norme associée au produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$ est définie par $|z| := \langle z,z\rangle^{\frac{1}{2}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$.

On note $\mathcal{U}_n$ le groupe des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire le groupe des opérateurs qui préservent le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle Uz,Uw\rangle = \langle z,w\rangle$$

pour tous $z,w$ dans $\mathbb{C}^n$ et tout $U \in \mathcal{U}_n$.

Par la suite, $\Omega$ désigne une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ tout entier. L'ouvert $\Omega$ est en particulier invariant par rotation, c'est-à-dire vérifie :

$$U(\Omega) = \Omega \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{U}_n.$$

Soit $\mu$ une mesure de probabilité invariante par rotation sur $\Omega$, à savoir qui vérifie :

$$\int_\Omega f(Uz)d\mu(z) = \int_\Omega f(z)d\mu(z)$$

pour toute fonction $f$ $\mu$-intégrable sur $\Omega$ et tout $U \in \mathcal{U}_n$.
Supposons de plus que la mesure $\mu$ admet des moments de tout ordre, c'est-à-dire :

$$m_k(\mu) := \int_\Omega |z|^{2k} d\mu(z) < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre $m_k(\mu)$ est appelée moment d'ordre $k$ de la mesure $\mu$. L'existence des moments implique en particulier que tous les polynômes sont de carré $\mu$-intégrable sur $\Omega$. De telles mesures ont été étudiées par C. Berg et M. Thill dans [5]. Par la suite, afin d'alléger les notations, on notera simplement $m_k$ le moment d'ordre $k$ de la mesure $\mu$.

On désigne par $L^2(\Omega,\mu)$ l'espace des fonctions mesurables sur $\Omega$ de carré intégrable par rapport à la mesure $\mu$.

Pour tout $n$-uplet d'entiers positifs ou nuls $\alpha = (\alpha_1, \cdots ,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on notera :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \quad \text{pour tout } z = (z_1, \cdots ,z_n) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z^{\alpha_n}}.$$

Rappelons que le produit scalaire hermitien de Fischer $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ est défini sur l'espace des polynômes holomorphes par sa restriction sur les monômes donnée par :

$$\left\langle z^\alpha, z^\beta \right\rangle_{\mathcal{F}} := \begin{cases} \alpha! & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

pour tous $\alpha,\beta$ dans $\mathbb{N}^n$.

Pour ce produit scalaire hermitien, un opérateur de multiplication et l'opérateur de différentiation associé sont adjoints l'un de l'autre. Plus précisément, soit $D = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n})$. Pour $Q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq d} a_\alpha z^\alpha$ un polynôme de $n$ variables à coefficients complexes, on note $Q^*$ le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de $Q$. On a alors l'identité suivante :

$$\langle Qg, h\rangle_{\mathcal{F}} = \langle g, Q^*(D)h\rangle_{\mathcal{F}}$$

pour tous polynômes holomorphes $g$ et $h$. Pour plus de renseignements sur le produit scalaire de Fischer, se référer à [32].

Considérons maintenant un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions holomorphes sur $\Omega$ tel qu'il existe un entier $N$ pour lequel $\mathcal{H}$ soit la somme directe du sous-espace constitué de ses polynômes de degré strictement inférieur à $N$ et de la clôture du sous-espace engendré par les polynômes homogènes dans $\mathcal{H}$ de degré supérieur ou égal à $N$. En particulier, les éléments polynomiaux de $\mathcal{H}$ forment un sous-espace dense dans $\mathcal{H}$.

Nous supposons également que les polynômes homogènes dans $\mathcal{H}$ de degré supérieur ou égal à $N$ sont orthogonaux entre eux dans $\mathcal{H}$.

Pour $d \geq N$, nous désignerons par $\mathcal{H}_d$ l'espace des polynômes homogènes de degré $d$ de $\mathcal{H}$.

On suppose de plus qu'il existe une suite $\{h_d\}_{d \geq N}$ de nombres réels positifs ou nuls et des constantes strictement positives $C_1$ et $C_2$ telles que :

$$C_1 |\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}| \leq h_d |\langle f, g\rangle_{\mathcal{F}}| \leq C_2 |\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}| \tag{3.1.1}$$

pour tout $d \geq N$ et tous $f, g$ dans $\mathcal{H}_d$.

Remarquons que si $h_d = 0$, alors nécessairement $\mathcal{H}_d = \{0\}$.

Soit $\mathcal{H}^{(0,1)}$ l'espace de Hilbert des (0,1)-formes à coefficients dans $\mathcal{H}$. On munit $\mathcal{H}^{(0,1)}$ du produit scalaire naturellement associé à celui de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire :

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} := \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, g_j\rangle_{\mathcal{H}}$$

pour toutes (0,1)−formes $f = \sum_{j=1}^n f_j d\overline{z}_j$ et $g = \sum_{j=1}^n g_j d\overline{z}_j$ appartenant à $\mathcal{H}^{(0,1)}$.

Pour un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, on notera $L^2_{loc}(\mathcal{V})$ l'espace des fonctions de carré localement intégrable sur $\mathcal{V}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\nu$ sur $\mathbb{C}^n$.

**Définition 3.1.1.** Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Pour $g \in L^2_{loc}(\mathcal{V})$, on définit au sens des distributions sur $\mathcal{V}$ la (0,1)-forme $\overline{\partial} g \in [L^2_{loc}(\mathcal{V})]^{(0,1)}$ de la manière suivante :

$$\overline{\partial} g := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

**Proposition 3.1.1.** *Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $g \in L^2_{loc}(\mathcal{V})$. Si $g$ est une fonction sur $\mathcal{V}$ qui vérifie l'équation $\overline{\partial} g = 0$, alors $g$ est holomorphe sur $\mathcal{V}$.*

*Preuve.* Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $g \in L^2_{loc}(\mathcal{V})$ une fonction sur $\mathcal{V}$ vérifiant l'équation $\overline{\partial} g = 0$. Le cas où $\mathcal{V}$ est borné et $g$ de carré Lebesgue-intégrable est traité dans [46]. Pour le cas général, on se ramène au cas précédent. Soit un ouvert borné $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. La fonction $g$ est de carré Lebesgue-intégrable sur $\mathcal{V}'$ et $\overline{\partial} g = 0$, au sens des distributions sur $\mathcal{V}'$. Par conséquent $g$ est holomorphe sur $\mathcal{V}'$. L'holomorphie étant une propriété locale, on en déduit facilement que $g$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{V}$ tout entier et la proposition est ainsi prouvée. $\square$

On désigne par $\mathcal{D}om(S)$ le sous-espace dense de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ constitué des (0,1)-formes dont les coefficients sont des éléments polynomiaux de $\mathcal{H}$.

Nous nous intéressons à l'opérateur suivant, qui résout l'équation du $\overline{\partial}$ :

$$S : \mathcal{D}om(S) \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$$

où pour $g \in \mathcal{D}om(S)$, $S(g)$ est l'unique élément de $L^2(\Omega,\mu) \cap L^2_{loc}(\Omega)$ qui soit orthogonal dans $L^2(\Omega,\mu)$ à tous les polynômes holomorphes et qui vérifie l'équation $\overline{\partial}[S(g)] = g$.
Cet opérateur sera appelé l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$.

L'objectif principal de ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ dans $L^2(\Omega,\mu)$.

Dans le cas d'une variable complexe, F. Haslinger a caractérisé la compacité et l'appartenance à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur les espaces de Bergman du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ et de mesure radiale $\mu$ dans les espaces $L^2$ associés et sur les espaces de Fock du plan dans les espaces $L^2$ associés. En fait, dans le cas d'une variable, l'opérateur $S^*S$ est diagonalisable, ce qui permet de caractériser la compacité et l'appartenance à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt directement par le calcul. En revanche, dans le cas de plusieurs variables, cet opérateur n'est plus diagonalisable. Notre méthode consiste à trouver des sous-espaces de dimension finie invariants sous l'action de $S^*S$ et à établir des estimations uniformes des valeurs propres de $S^*S$ sur ces espaces stables. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, en termes de moments, pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne aux classes de Schatten pour toute une classe d'espaces de Hilbert de (0,1)-formes à coefficients holomorphes et ce dans le cas de plusieurs variables. Nous verrons dans le paragraphe 3.4 que nos résultats s'appliquent en particulier aux espaces des (0,1)-formes à coefficients dans l'un des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques, tels que les espaces de Bergman à poids, l'espace de Hardy, les espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, les espaces de Hardy-Sobolev ou l'espace invariant de Möbius.

Les principaux résultats sont les suivants :

**Théorème 3.1.1.** *L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, $S : \mathcal{D}om(S) \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$, se prolonge par continuité à $\mathcal{H}^{(0,1)}$ tout entier si et seulement si*

$$\sup_{d\in\mathbb{N},\, h_d>0} \frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left[d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right] < +\infty. \tag{3.1.2}$$

On suppose maintenant que la condition (3.1.2) est satisfaite et on note encore $S$ le prolongement continu de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ à $\mathcal{H}^{(0,1)}$ tout entier. Nous obtenons alors les théorèmes suivants :

**Théorème 3.1.2.** *L'opérateur $S : \mathcal{H}^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ est compact si et seulement si*

$$\lim_{d\to\infty,\, h_d>0} \frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left[d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right] = 0. \tag{3.1.3}$$

**Théorème 3.1.3.** *Si $p > 0$ et*

$$\sum_{d\in\mathbb{N},\, h_d>0} \dim\mathcal{H}_d\left[\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right)\right]^{\frac{p}{2}} < +\infty, \tag{3.1.4}$$

*alors l'opérateur $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$.*

*Réciproquement supposons que soit $n = 1$ et $p > 0$, soit $n \geq 2$ et $p \geq 2$, et que de plus $S : \mathcal{H}^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ appartienne à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$, alors la propriété (3.1.4) est vraie.*

Dans le cas $n \geq 2$ et $0 < p < 2$, la question de savoir si $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$ implique (3.1.4) reste ouverte.

## 3.2 Résultats préliminaires

L'objectif principal de ce paragraphe consiste à obtenir une estimation suffisamment précise de $\langle S^*S(u),u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}$ pour tout vecteur unitaire $u$ de $\mathcal{D}om(S)$, afin de pouvoir étudier la nature de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$.
Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est bien défini et exprimer cet opérateur, ainsi que son opérateur adjoint, en termes de noyaux reproduisants et de certains opérateurs de Hankel.

Pour commencer, nous allons utiliser l'invariance de $\Omega$ et de $\mu$ pour donner une expression du produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ sur l'espace des polynômes holomorphes et montrer que ce produit scalaire est, en un certain sens, comparable au produit scalaire de Fischer.

Soit $dU$ la mesure de probabilité de Haar sur $\mathcal{U}_n$. On rappelle que $dU$ est l'unique mesure de Borel positive de masse totale 1 qui vérifie

$$\int_{\mathcal{U}_n} F(U_1 U)dU = \int_{\mathcal{U}_n} F(UU_1)dU = \int_{\mathcal{U}_n} F(U)dU$$

pour toute fonction $F$ continue sur $\mathcal{U}_n$ et tout $U_1 \in \mathcal{U}_n$.

On note $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, c'est-à dire $\mathbb{S}_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ et $\sigma$ la mesure de probabilité invariante par rotation sur $\mathbb{S}_n$. On désigne par $L^1(\mathbb{S}_n,\sigma)$ l'espace des fonctions $\sigma$-intégrables sur $\mathbb{S}_n$.

**Proposition 3.2.1.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{S}_n,\sigma)$. Pour tout point $\eta$ de la sphère $\mathbb{S}_n$, on a l'identité suivante :*

$$\int_{\mathbb{S}_n} f d\sigma = \int_{\mathcal{U}_n} f(U\eta)dU.$$

*Preuve.* Se référer à [40].

□

**Proposition 3.2.2.** *Si $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, alors*

$$\int_{\mathbb{S}_n} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta d\sigma(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!\,\alpha!}{(n+|\alpha|-1)!} & si\ \alpha = \beta \\ 0 & si\ \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

*Preuve.* Se référer à [40]. □

Des propositions 3.2.1 et 3.2.2, on déduit le lemme suivant :

**Lemme 3.2.1.** *Si $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, alors*

$$\int_{\Omega} z^\alpha \bar{z}^\beta d\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!\,m_{|\alpha|}\,\alpha!}{(n+|\alpha|-1)!} & si\ \alpha = \beta \\ 0 & si\ \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

*Preuve.* En vertu de l'invariance de $\Omega$ et de $\mu$ nous voyons grâce au théorème de Fubini et à la proposition 3.2.1, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z^\alpha \bar{z}^\beta d\mu(z) &= \int_{\mathcal{U}_n} \int_{\Omega} (Uz)^\alpha (\overline{Uz})^\beta d\mu(z)dU \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{U}_n} (Uz)^\alpha (\overline{Uz})^\beta dU d\mu(z) \\ &= \int_{\Omega} |z|^{|\alpha|+|\beta|} d\mu(z) \int_{\mathbb{S}_n} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

L'identité precédente, combinée à la proposition 3.2.2, nous donne (3.2.5). □

Ce lemme montre que sur chaque espace de polynômes holomorphes homogènes de degré constant, le produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$ est comparable au produit scalaire de Fischer.

Maintenant, nous allons exhiber les noyaux reproduisants et les opérateurs de Hankel qui interviennent dans l'expression de l'opérateur $S$.

Commençons tout d'abord par rappeler la définition d'un noyau reproduisant. Soit $H$ un espace de Hilbert constitué de fonctions holomorphes sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, tel que pour tout point $z \in \mathcal{V}$, l'opérateur d'évaluation en $z$

$$\begin{aligned} V_z : &H \longrightarrow \mathbb{C} \\ &f \mapsto f(z), \end{aligned}$$

est borné sur $H$.
En vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe pour tout $z \in \mathcal{V}$ une unique fonction $K_z \in H$ telle que :

$$f(z) = \langle f,K_z \rangle_H \quad \text{pour tout } f \in H.$$

Soit $K$ la fonction définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par :

$$K(z,w) = \overline{K_z(w)} \quad \text{pour tous } z,w \text{ dans } \mathcal{V}.$$

On appelle $K$ le noyau reproduisant de $H$. Par abus de langage, la fonction $K_z$ sera également appelée noyau reproduisant de $H$.

Le noyau reproduisant d'un espace $H$ peut s'exprimer en fonction de toute base orthonormale de $H$. En effet :

**Lemme 3.2.2.** *Soit $H$ un espace de Hilbert constitué de fonctions holomorphes sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$ et admettant un noyau reproduisant. Si $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $H$, alors pour tout $z \in \mathcal{V}$ on a :*

$$K_z(w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j(z)\, \overline{e_j(w)} \quad \textit{pour tout } w \in \mathcal{V}.$$

*Preuve.* Soit $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de $H$. Pour tout $z \in \mathcal{V}$, la fonction $K_z \in H$ peut s'écrire sous la forme

$$K_z(w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle K_z,e_j \rangle_H \; e_j(w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{e_j(z)}\, e_j(w) \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{V}.$$

La dernière égalité donne le lemme. □

Ce lemme implique en particulier que $K(.,w)$ est analytique pour tout $w \in \mathcal{V}$, $K(z,.)$ est anti-analytique pour tout $z \in \mathcal{V}$ et $\overline{K(z,w)} = K(w,z)$ pour tous $z,w$ dans $\mathcal{V}$.

Nous allons maintenant définir une projection sur le sous-espace des polynômes holomorphes de $L^2(\Omega,\mu)$ à l'aide de noyaux reproduisants. Cette projection nous permettra par la suite de définir les opérateurs de Hankel dont nous avons besoin pour étudier l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$.

Pour $d$ un entier positif, on désigne par $B_d$ le noyau reproduisant du sous-espace de $L^2(\Omega,\mu)$ des polynômes holomorphes de degré inférieur ou égal à $d$ par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega,\mu)$.

**Proposition 3.2.3.** *Pour tout polynôme $f$,*

$$(P_\mu f)(z) := \lim_{d\to\infty} \int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \tag{3.2.6}$$

*est finie.*

*De plus l'application $P_\mu$ est une projection symétrique prenant ses valeurs dans l'espace des polynômes holomorphes.*
*Plus précisément, $P_\mu$ vérifie les propriétés suivantes :*

*i) $P_\mu \circ P_\mu = P_\mu$;*
*ii) $\langle P_\mu f, g\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = \langle f, P_\mu g\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}$ pour tous polynômes $f$ et $g$;*
*iii) $P_\mu h = h$ pour tout polynôme holomorphe $h$.*

*Preuve.* D'après le lemme 3.2.1, on sait que pour tout polynôme $f$

$$(P_\mu f)(z) := \lim_{d\to\infty} \int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega) < +\infty,$$

puisque l'intégrale dans (3.2.6) est la même pour des entiers $d$ suffisamment grands. En effet, soit $f$ un polynôme de degré $l \in \mathbb{N}$. D'après (3.2.5), $f$ est orthogonal dans $L^2(\Omega,\mu)$ à tous les monômes holomorphes de degré strictement supérieur à $l$. Or, grâce aux lemmes 3.2.1 et 3.2.2, on peut écrire $B_d$ sous la forme

$$B_d(z,w) = \sum_{|\alpha|\le d} \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)! m_{|\alpha|} \alpha!} z^\alpha \overline{w}^\alpha. \tag{3.2.7}$$

Ainsi pour tout $d \geq l$ on a :

$$\int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega B_l(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega).$$

Par conséquent $P_\mu$ est bien définie.

Ensuite, il est clair que si $h$ est un polynôme holomorphe de degré $d$ alors :

$$P_\mu h = \int_\Omega B_d(z,\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = h,$$

ce qui nous donne la propriété iii).

De plus, si $f$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$, l'identité (3.2.7) nous donne

$$\begin{aligned} P_\mu f(z) &= \int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq d} \left( \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)! m_{|\alpha|} \alpha!} \int_\Omega \overline{\omega}^\alpha f(\omega) d\mu(\omega) \right) z^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit que $P_\mu f$ est un polynôme holomorphe de degré au plus $d$. Ainsi $P_\mu$ prend bien ses valeurs dans l'espace des polynômes holomorphes et en combinant ceci avec la propriété iii), on obtient la propriété i).

Il nous reste à prouver la propriété ii). Pour cela, soient $f$ un polynôme de degré $d$ et $g$ un polynôme de degré $l$. Par symétrie des rôles, on peut supposer que $l \leq d$. On a donc $P_\mu f(z) = \int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega)$ et $P_\mu g(z) = \int_\Omega B_d(z,\omega) g(\omega) d\mu(\omega)$. Ainsi, grâce au théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \langle P_\mu f, g \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \int_\Omega \int_\Omega B_d(z,\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \overline{g(z)} d\mu(z) \\ &= \int_\Omega f(\omega) \overline{\int_\Omega B_d(\omega,z) g(z) d\mu(z)} d\mu(\omega) \\ &= \langle f, P_\mu g \rangle_{L^2(\Omega,\mu)}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne la propriété ii) et complète la preuve de la proposition. □

En général, cette projection n'est pas prolongeable par continuité à $L^2(\Omega,\mu)$. En effet, il existe des mesures $\mu$ invariantes par rotation telles que les polynômes ne soient pas denses dans $L^2(\Omega,\mu)$ (voir [5]).

Nous pouvons désormais définir nos opérateurs de Hankel à partir de la projection $P_\mu$. Si $\varphi$ est un polynôme holomorphe, alors l'opérateur de Hankel de symbole $\overline{\varphi}$ est l'opérateur qui à un polynôme $f$ associe :

$$H_{\overline{\varphi}} f := (I - P_\mu)(\overline{\varphi} f),$$

où $I$ est l'opérateur identité sur $L^2(\Omega,\mu)$.

Le lemme suivant établit que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est bien défini et qu'on peut exprimer cet opérateur en termes d'opérateurs de Hankel.

Si $d \geq N$, on note $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ des (0,1)-formes à coefficients dans $\mathcal{H}_d$ et $K_d$ le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_d$.

**Lemme 3.2.3.** *L'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$, noté $S$, est bien défini et si $g = \sum_{j=1}^n g_j \, d\overline{z}_j \in \mathcal{D}om(S)$, alors :*

$$S(g)(z) = \sum_{j=1}^n H_{\bar{z}_j}(g_j).$$

*En particulier, la restriction de $S$ à $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ est donnée par :*

$$S(g)(z) = \langle g,\omega_d(z,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \text{ pour tout } g \in \mathcal{H}_d^{(0,1)},$$

*où $\omega_d : \Omega \times \Omega \to \mathcal{H}^{(0,1)}$ est l'application définie par :*

$$\omega_d(z,\xi) := \sum_{j=1}^{n} \overline{H_{\overline{z}_j}(K_d(z,\xi))}\, d\bar{\xi}_j. \tag{3.2.8}$$

*Preuve.* Soit $g = \sum_{j=1}^{n} g_j\, d\overline{z}_j \in \mathcal{D}om(S)$. Posons pour tout $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} S(g)(z) &= \sum_{j=1}^{n} (\bar{z}_j g_j(z) - P_\mu[\bar{w}_j g_j](z)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} H_{\bar{z}_j}(g_j)(z). \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Montrons que $S(g)$ est l'unique solution de notre problème du $\overline{\partial}$.

On commence par montrer que $S(g)$ est une solution.
D'après la proposition 3.2.3, la fonction $S(g)$ est polynomiale, donc elle appartient à $L^2(\Omega,\mu)$.
De plus, si $f$ est un polynôme holomorphe, en utilisant (3.2.9) et les propriétés de $P_\mu$ vues dans la proposition 3.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} \langle S(g),f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \left[\bar{z}_j g_j - P_\mu(\bar{w}_j g_j)\right],f \right\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\langle \bar{z}_j g_j,f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} - \langle P_\mu(\bar{w}_j g_j),f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\langle \bar{z}_j g_j,f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} - \langle \bar{z}_j g_j(z),P_\mu f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\langle \bar{z}_j g_j,f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} - \langle \bar{z}_j g_j,f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $S(g)$ est orthogonale aux polynômes holomorphes.
Enfin, en combinant l'identité (3.2.9) et le fait que $P_\mu$ soit une projection sur l'espace des polynômes holomorphes, il vient que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}S(g) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\,\overline{\partial}(\bar{z}_j g_j) - \overline{\partial}(P_\mu(\bar{w}_j g_j))\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\,\overline{\partial}(\bar{z}_j)\, g_j + \bar{z}_j\, \overline{\partial}(g_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z}_j = g.\end{aligned}$$

La fonction $S(g)$ est donc solution de notre problème du $\overline{\partial}$.

Montrons maintenant qu'une telle solution est unique. Supposons qu'il existe une fonction $u \in L^2(\Omega,\mu) \cap L^2_{loc}(\Omega)$ orthogonale aux polynômes holomorphes et vérifiant $\overline{\partial}u = g$. La fonction $S(g) - u$ satisfait alors l'équation

$$\overline{\partial}\,[S(g) - u] = 0.$$

Il s'ensuit en vertu de la proposition 3.1.1, que la fonction $S(g) - u$ est holomorphe. Or, par hypothèse, la fonction $S(g) - u$ est également orthogonale dans $L^2(\Omega,\mu)$ à tous les polynômes holomorphes. Ceci implique que nécessairement $S(g) - u$ est la fonction nulle et l'unicité de la solution est ainsi prouvée.

Finalement, on a montré que l'opérateur $S$ est bien défini et que de plus, pour tout $g = \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z}_j \in \mathcal{D}om(S)$, on a

$$S(g) = \sum_{j=1}^{n} H_{\bar{z}_j}(g_j).$$

Maintenant si pour $d \in \mathbb{N}$ les composantes $g_j$ de $g$ sont dans $\mathcal{H}_d$, en utilisant la propriété iii) de la proposition 3.2.3 on voit que pour $k \geq d+1$

$$\begin{aligned}S(g)(z) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\bar{z}_j g_j(z) - P_\mu(\bar{w}_j g_j)(z)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\bar{z}_j P_\mu(g_j)(z) - P_\mu(\bar{w}_j g_j)(z)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega B_k(z,w) g_j(w)(\overline{z}_j - \overline{w}_j)\, d\mu(w).\end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant la formule de reproduction pour chaque $g_j$ dans $\mathcal{H}_d$, on obtient

$$\begin{aligned}
S(g)(z) &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} B_k(z,w)\langle g_j, K_d(.,w)\rangle_{\mathcal{H}}(\overline{z}_j - \overline{w}_j)\, d\mu(w) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \langle g_j, \overline{B_k(z,w)K_d(w,\cdot)(\bar{z}_j - \bar{w}_j)}\rangle_{\mathcal{H}}\, d\mu(w) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle g_j, \int_{\Omega} \overline{B_k(z,w)K_d(w,\cdot)(\bar{z}_j - \bar{w}_j)}\, d\mu(w) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle g_j, \overline{H_{\overline{z}_j}(K_d(z,.)}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g, \omega_d(z,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du lemme. □

Comme l'expression de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ fait intervenir les opérateurs de Hankel $H_{\overline{z}_j}$, $1 \leq j \leq n$, nous souhaitons mieux connaître ces opérateurs. À cet effet, le lemme suivant nous donne :

**Lemme 3.2.4.** *Soit $j$ un entier tel que $1 \leq j \leq n$. Pour tout polynôme holomorphe homogène $g$ de degré $d+1$ on a l'identité suivante :*

$$H_{\overline{z}_j}(g) = \overline{z}_j g - \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\frac{\partial g}{\partial z_j}. \tag{3.2.10}$$

*Preuve.* Soit $g$ un polynôme holomorphe homogène de degré $d+1$. Pour établir l'identité (3.2.10), observons tout d'abord grâce à (3.2.5) que le polynôme $\bar{z}_j g$ est orthogonal dans $L^2(\Omega,\mu)$ à tout polynôme holomorphe homogène de degré différent de $d$. De plus, si $f$ est un polynôme holomorphe homogène de degré $d$, alors par le lemme 3.2.1 et le fait que l'opérateur de multiplication par $z_j$ et l'opérateur de différentiation $\frac{\partial}{\partial z_j}$ sont adjoints l'un de l'autre par rapport au produit scalaire de Fischer, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle P_\mu(\bar{z}_j g), f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \langle \bar{w}_j g, f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} \\
&= \langle g, w_j f\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} \\
&= \frac{(n-1)!m_{d+1}}{(n+d)!}\left\langle \frac{\partial g}{\partial z_j}, f\right\rangle_{\mathcal{F}} = \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\left\langle \frac{\partial g}{\partial z_j}, f\right\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Dans le chapitre 2, nous avons vu que pour étudier les propriétés spectrales d'un opérateur $T$, on se ramenait souvent à l'étude de l'opérateur $T^*T$. C'est ce que nous souhaitons faire pour étudier l'opérateur $S$. Mais pour cela, il faut tout d'abord savoir si l'opérateur $S^*S$ est bien défini sur $\mathcal{D}om(S)$.

Pour $d \geq N$, on note $\mathcal{N}_d$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ constitué des polynômes de degré strictement inférieur à $d$ et ${\mathcal{N}_d}^{(0,1)}$ l'espace des (0,1)-formes ayant leurs coefficients dans $\mathcal{N}_d$. On désigne par $\mathcal{R}_d$ la clôture dans $\mathcal{H}$ de la somme directe des sous-espaces $\mathcal{H}_k$, pour $k \geq d$ et par ${\mathcal{R}_d}^{(0,1)}$ l'espace des (0,1)-formes à coefficients dans $\mathcal{R}_d$.
Par hypothèse, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^{(0,1)}$ peuvent être décomposés en les sommes directes topologiques suivantes :

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}_d \oplus \mathcal{R}_d \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{(0,1)} = {\mathcal{N}_d}^{(0,1)} \oplus {\mathcal{R}_d}^{(0,1)}. \tag{3.2.11}$$

On désignera la projection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{N}_d$ et la projection de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ dans ${\mathcal{N}_d}^{(0,1)}$ correspondant à ces deux sommes directes par le même notation $\pi_d$. Pour toute (0,1)−forme $g = \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z}_j \in \mathcal{H}^{(0,1)}$, on obtient ainsi

$$\pi_d g = \sum_{j=1}^{n} \pi_d g_j d\overline{z}_j. \tag{3.2.12}$$

**Lemme 3.2.5.** *Le domaine $\mathcal{D}om(S^*)$ de $S^*$ contient tous les polynômes.*

*Preuve.* Pour obtenir le lemme, il suffit de montrer que $\mathcal{D}om(S^*)$ contient les monômes $z^\alpha \overline{z}^\beta$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$. Soient donc $\alpha,\beta$ dans $\mathbb{N}^n$. Choisissons un entier $k$ tel que $k \geq |\alpha| + |\beta| + 3$.
D'après (3.2.12), on voit que pour tout $g = \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z}_j \in \mathcal{D}om(S)$, on a :

$$\langle (S \circ (I - \pi_k))(g), z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = \sum_{j=1}^{n} \langle H_{\overline{z}_j}((I - \pi_k) g_j), z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)}.$$

Or d'après le lemme 3.2.4, pour tout $1 \leq j \leq n$, $H_{\overline{z}_j}((I - \pi_k) g_j)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H_{\overline{z}_j}((I - \pi_k) g_j)(z) = \overline{z}_j P_j(z) + Q_j(z),$$

où $P_j$ et $Q_j$ sont des polynômes holomorphes ne contenant que des termes homogènes de degré supérieur ou égal à $k - 1 \geq |\alpha| + |\beta| + 2$.
Ainsi, en vertu du lemme 3.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \langle H_{\overline{z}_j}((I - \pi_k) g_j), z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \langle \overline{z}_j P_j + Q_j, z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} \\ &= \langle z^\beta P_j, z_j z^\alpha \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} + \langle z^\beta Q_j, z^\alpha \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = 0 \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.
Par conséquent, on obtient :

$$\langle (S \circ (I - \pi_k))(g), z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = 0 \ \text{ pour tout } g \in \mathcal{D}om(S).$$

Étant donné que l'opérateur $S \circ \pi_k$ est de rang fini, ceci implique qu'il existe une constante $C > 0$, ne dépendant pas de $g$, telle que

$$\begin{aligned} |\langle Sg, z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)}| &= |\langle (S \circ \pi_k)(g), z^\alpha \overline{z}^\beta \rangle_{L^2(\Omega,\mu)}| \\ &\leq C \|g\|_{\mathcal{H}^{(0,1)}}. \end{aligned}$$

D'après la définition 2.1.1, cette dernière inégalité prouve que $z^\alpha\overline{z}^\beta$ appartient à $\mathcal{D}om(S^*)$ et le lemme est ainsi prouvé. $\square$

Soit $S_N$ la restriction de $S$ à $\mathcal{D}om(S_N) := \mathcal{D}om(S)\cap{\mathcal{R}_N}^{(0,1)}$. En vertu du lemme 3.2.5, l'opérateur $S_N^*S_N$ est bien défini sur $\mathcal{D}om(S_N^*)$.

**Lemme 3.2.6.** *Soit $d \geq N$. Pour toute (0,1)-forme $f$ dans $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ on a l'identité suivante :*

$$(S_N^*S_N)(f)(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\langle f,\eta_j^d(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}\, d\overline{\xi}_j,$$

*où* $\eta_j^d(z,\xi) := \sum_{k=1}^{n}\eta_{j,k}^d(z,\xi)\, d\overline{z}_k$ *et*

$$\eta_{j,k}^d(z,\xi) = \int_\Omega \overline{H_{\overline{w}_k}\,(K_d(w,z))}H_{\overline{w}_j}(K_d(w,\xi))\, d\mu(w).$$

*Preuve.* Soient deux entiers $d \geq N$ et $k \geq N$. Soient $f = \sum_{j=1}^n f_j d\overline{z}_j \in \mathcal{H}_d^{(0,1)}$ et $g = \sum_{j=1}^n g_j d\overline{z}_j \in \mathcal{H}_k^{(0,1)}$. Si $d \neq k$ alors, en appliquant les lemmes 3.2.1 et 3.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle S_N(f),S_N(g)\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\\
&\quad= \left\langle \sum_{j=1}^n H_{\bar{z}_j}(f_j), \sum_{l=1}^n H_{\bar{z}_l}(g_l)\right\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\\
&\quad= \left\langle \sum_{j=1}^n \left(\overline{z}_j f_j - \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\right), \sum_{l=1}^n \left(\overline{z}_l g_l - \frac{m_{k+1}}{(n+k)m_k}\frac{\partial g_l}{\partial z_l}\right)\right\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\\
&\quad= \sum_{1\leq j\leq n, 1\leq l\leq n}\Bigg[\langle z_l f_j, z_j g_l\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} - \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\langle z_l\frac{\partial f_j}{\partial z_j}, g_l\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\\
&\qquad -\frac{m_{k+1}}{(n+k)m_k}\langle f_j, z_j\frac{\partial g_l}{\partial z_l}\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} + \frac{m_{d+1}}{(n+d)m_d}\frac{m_{k+1}}{(n+k)m_k}\langle\frac{\partial f_j}{\partial z_j},\frac{\partial g_l}{\partial z_l}\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\Bigg]\\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Or, si $d \neq k$, on a également

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \langle f,\eta_j^d(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} d\overline{\xi}_j, g\right\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} = 0,$$

puisque $\sum_{j=1}^n \langle f,\eta_j^d(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} d\overline{\xi}_j \in \mathcal{H}_d^{(0,1)}$ et que les polynômes homogènes de degrés différents sont orthogonaux dans $\mathcal{H}$.

D'autre part, si $d = k$, alors en vertu du lemme 3.2.3, on a :

$$\begin{aligned}\langle S_N(f), S_N(g)\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \int_\Omega \langle f, \omega_d(z,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \langle \omega_d(z,\cdot), g\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} d\mu(z) \\ &= \left\langle \int_\Omega \langle f, \omega_d(z,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \omega_d(z,\cdot) d\mu(z), g \right\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle f, \eta_j^d(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} d\overline{\xi}_j, g \right\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité complète la preuve du lemme. □

Ainsi la restriction de l'opérateur $S_N^* S_N$ à l'espace $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ peut également s'exprimer en termes d'opérateurs de Hankel et de noyaux reproduisants.

Le lemme qui suit montre que les espaces $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$, $d \geq N$, sont en fait des sous-espaces stables pour l'opérateur $S_N^* S_N$. De plus, il nous fournit une expression précise de $S_N^* S_N$ sur des bases particulières de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$. Cette expression va nous permettre de faire des estimations.

Soit $d \geq N$. Pour une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{H}_d$, on définit la famille de (0,1)-formes $\widetilde{\mathcal{B}_d} := \{f d\overline{z}_k, f \in \mathcal{B}_d, k = 1, \ldots, n\}$. Il est clair que $\widetilde{\mathcal{B}_d}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$.

**Lemme 3.2.7.** *Pour tout $d \geq N$, l'opérateur $S_N^* S_N$ envoie $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ dans lui-même. Plus précisément, si $\mathcal{B}_d$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_d$, alors pour tout polynôme $f \in \mathcal{B}_d$ et tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a :*

$$\begin{aligned}S_N^* S_N(f d\overline{z}_k)(\xi) = \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} &\left[ \sum_{g \in \mathcal{B}_d} g(\xi) \langle f, g\rangle_{\mathcal{F}}\ d\overline{\xi}_k \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^n \sum_{g \in \mathcal{B}_d} g(\xi) \left(1 - \frac{m_d^2 (n+d)}{m_{d-1} m_{d+1}(n+d-1)}\right) \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_k}, \frac{\partial g}{\partial z_j} \right\rangle_{\mathcal{F}}\ d\overline{\xi}_j \right].\end{aligned}$$

*Preuve.* Soit $\mathcal{B}_d$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_d$ et soit $f \in \mathcal{B}_d$. En vertu du lemme 3.2.2, on peut écrire le noyau reproduisant $K_d$ de $\mathcal{H}_d$ sous la forme :

$$K_d(z,w) = \sum_{g \in \mathcal{B}_d} g(z) \overline{g(w)}.$$

Ensuite, en utilisant le lemme 3.2.6, il vient que

$$\begin{aligned}(S_N^*S_N)(f\,d\overline{z}_k)(\xi) &= \sum_{j=1}^{n}\langle f,\eta^d_{j,k}(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{H}}\,d\overline{\xi}_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \langle f,\overline{H_{\overline{z}_k}\,(K_d(z,\cdot))}\rangle_{\mathcal{H}}\overline{H_{\overline{z}_j}(K_d(z,\xi))}\,d\mu(z)\,d\overline{\xi}_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega H_{\overline{z}_k}(f)\overline{H_{\overline{z}_j}(K_d(z,\xi))}\,d\mu(z)\,d\overline{\xi}_j\\ &= \sum_{g\in\mathcal{B}_d} g(\xi)\left[\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega H_{\overline{z}_k}(f)\overline{H_{\overline{z}_j}(g)}\,d\mu(z)\,d\overline{\xi}_j\right].\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (3.2.5), pour $j,k$ fixés et $g\in\mathcal{B}_d$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_\Omega H_{\overline{z}_k}(f)\overline{H_{\overline{z}_j}(g)}d\mu(z) &= \langle z_jf,z_kg\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} + \frac{m_d^2\,\langle\frac{\partial f}{\partial z_k},\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}}{(n+d-1)^2\,m_{d-1}^2}\\ &\quad - \frac{m_d}{(n+d-1)\,m_{d-1}}\left(\langle f,z_k\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} + \langle z_j\frac{\partial f}{\partial z_k},g\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\right)\\ &= \frac{(n-1)!\,m_{d+1}}{(n+d)!}\langle z_jf,z_kg\rangle_{\mathcal{F}} + \frac{(n-1)!\,m_d^2\,\langle\frac{\partial f}{\partial z_k},\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{\mathcal{F}}}{m_{d-1}(n+d-1)!\,(n+d-1)}\\ &\quad - \frac{(n-1)!\,m_d^2\,\left(\langle z_j\frac{\partial f}{\partial z_k},g\rangle_{\mathcal{F}} + \langle f,z_k\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{\mathcal{F}}\right)}{(n+d-1)!\,(n+d-1)\,m_{d-1}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant que l'opérateur de multiplication par $z_j$ et l'opérateur de différentiation $\frac{\partial}{\partial z_j}$ sont adjoints l'un de l'autre par rapport au produit scalaire de Fischer, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega H_{\overline{z}_k}(f)\overline{H_{\overline{z}_j}(g)}d\mu(z) &= \frac{(n-1)!\,m_{d+1}}{(n+d)!}\langle z_jf,z_kg\rangle_{\mathcal{F}} - \frac{(n-1)!\,m_d^2\,\langle\frac{\partial f}{\partial z_k},\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{\mathcal{F}}}{m_{d-1}(n+d-1)!\,(n+d-1)}\\ &= \frac{(n-1)!\,m_{d+1}}{(n+d)!}\left(1-\frac{m_d^2\,(n+d)}{m_{d-1}m_{d+1}\,(n+d-1)}\right)\langle\frac{\partial f}{\partial z_k},\frac{\partial g}{\partial z_j}\rangle_{\mathcal{F}}\\ &\quad + \frac{(n-1)!\,m_{d+1}}{(n+d)!}\,\delta_{j,k}\,\langle f,g\rangle_{\mathcal{F}},\end{aligned}$$

avec la convention

$$\delta_{j,k} := \begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ 1 & \text{si } j=k.\end{cases}$$

De ce qui précède, on déduit que

$$(S_N^* S_N)(f d\overline{z}_k)(\xi) = \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \sum_{g \in \mathcal{B}_d} g(\xi) \left[ \sum_{j=1}^n \delta_{j,k} \langle f, g \rangle_{\mathcal{F}} \, d\overline{\xi}_j \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{m_d^2\,(n+d)}{m_{d-1} m_{d+1} (n+d-1)}\right) \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_k}, \frac{\partial g}{\partial z_j} \right\rangle_{\mathcal{F}} d\overline{\xi}_j \right],$$

ce qui achève la démonstration. □

Les estimations cherchées sont l'objet des deux derniers lemmes du paragraphe. Tout d'abord, la minoration :

**Lemme 3.2.8.** *Il existe une constante strictement positive $C$ telle que*

$$\sum_{k=1}^n \langle S_N^* S_N (f(\xi) d\overline{\xi}_k), f(\xi) d\overline{\xi}_k \rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \geq C \frac{m_{d+1}}{h_d (n+d)!} \left[ d \left( 1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1} m_{d+1}} \right) + (n-1) \right]$$

*pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et tout vecteur unitaire $f \in \mathcal{H}_d$.*

*Preuve.* Soient $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et un vecteur unitaire $f \in \mathcal{H}_d$. On complète $f$ en une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{H}_d$. En combinant le lemme 3.2.7 et (3.1.1), il vient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \langle S_N^* S_N (f(\xi) d\overline{\xi}_k), f(\xi) d\overline{\xi}_k \rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \\
&\quad = \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \sum_{k=1}^n \left[ \|f\|_{\mathcal{F}}^2 + \left( 1 - \frac{m_d^2\,(n+d)}{m_{d-1} m_{d+1} (n+d-1)} \right) \left\| \frac{\partial f}{\partial z_k} \right\|_{\mathcal{F}}^2 \right] \\
&\quad = \|f\|_{\mathcal{F}}^2 \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \left[ n + \left( 1 - \frac{(n+d)\, m_d^2}{m_{d-1} m_{d+1} (n+d-1)} \right) d \right] \\
&\quad = \|f\|_{\mathcal{F}}^2 \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \left[ n + d - \frac{d\,(n+d)\, m_d^2}{m_{d-1} m_{d+1} (n+d-1)} \right] \\
&\quad \geq C_1 \frac{(n-1)!}{h_d (n+d-1)!} \frac{m_{d-1} m_{d+1} (n+d-1) - d m_d^2}{m_{d-1} (n+d-1)} \\
&\quad \geq C \frac{m_{d+1}}{h_d (n+d)!} \left[ d \left( 1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1} m_{d+1}} \right) + (n-1) \right],
\end{aligned}$$

où $C_1$ est la constante $C_1$ intervenant dans (3.1.1) et $C$ est une constante strictement positive ne dépendant que de $n$. □

On remarque que la minoration n'est obtenue que pour des vecteurs unitaires particuliers de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ et non pour tout vecteur unitaire de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$.

Ensuite, on s'intéresse à la majoration :

**Lemme 3.2.9.** *Il existe une constante strictement positive $C$ telle que*

$$\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \leq C \frac{m_{d+1}}{h_d (n+d)!} \left[ d\left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right) + (n-1)\right]$$

*pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et tout vecteur unitaire $u \in \mathcal{H}_d^{(0,1)}$.*

*Preuve.* Soient $d \geq N$ tel que $h_d > 0$ et un vecteur unitaire $u \in \mathcal{H}_d^{(0,1)}$. Comme précédemment, on considère une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{H}_d$ et on écrit $u$ sous la forme

$$u = \sum_{f\in\mathcal{B}_d, k=1,\dots,n} a_{f,k} f(\xi) d\overline{\xi}_k.$$

La famille finie $\{a_{f,k}\}_{f,k}$ de nombres complexes satisfait

$$\sum_{f\in\mathcal{B}_d, k=1,\dots,n} |a_{f,k}|^2 = 1, \tag{3.2.13}$$

puisque $u$ est un vecteur unitaire et que $\widetilde{\mathcal{B}_d}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$. De plus, notons que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les moments $m_d$ satisfont l'inégalité suivante :

$$m_d^2 \leq m_{d-1}m_{d+1} \quad \text{pour tout entier } d \geq 1. \tag{3.2.14}$$

La majoration est obtenue de manière différente selon la dimension.

* Si $n \geq 2$, alors en utilisant le lemme 3.2.7, (3.2.13) et (3.2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \\
&\quad = \sum_{f,f',k,k'} a_{f,k}\overline{a_{f',k'}} \langle S_N^* S_N(f(\xi)d\overline{\xi}_k), f'(\xi)d\overline{\xi}_{k'}\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \\
&\quad = \frac{(n-1)!\, m_{d+1}}{(n+d)!} \left[ \sum_{f,k} |a_{f,k}|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2 + \left(1 - \frac{m_d^2(n+d)}{m_{d-1}m_{d+1}(n+d-1)}\right) \left\| \sum_{f,k} a_{f,k} \frac{\partial f}{\partial z_k}\right\|_{\mathcal{F}}^2 \right] \\
&\quad \leq \frac{(n-1)! m_{d+1}}{(n+d)!} \left[ \sum_{f,k} |a_{f,k}|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2 + \left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right) \left\| \sum_{f,k} a_{f,k} \frac{\partial f}{\partial z_k}\right\|_{\mathcal{F}}^2 \right].
\end{aligned}$$

Puisque $\| \sum_{f,k} a_{f,k} \frac{\partial f}{\partial z_k}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq d \sum_{f,k} |a_{f,k}|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2$, il s'ensuit l'inégalité suivante :

$$\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \leq \frac{(n-1)! m_{d+1}}{(n+d)!} \left[ 1 + d\left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)\right] \sum_{f,k} |a_{f,k}|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Ceci, combiné avec (3.1.1) et (3.2.13), implique que

$$\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \leq C \frac{m_{d+1}}{(n+d)!\, h_d} \left( (n-1) + d\left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)\right),$$

pour une constante strictement positive $C$ indépendante de $d$ et de $u$.

* Si $n = 1$, alors $u$ est nécessairement de la forme $u(\xi) = f(\xi)d\overline{\xi}$, avec $f$ vecteur unitaire de $\mathcal{H}_d$. Le lemme 3.2.7, (3.1.1) et le calcul précédent, nous donnent alors que

$$\begin{aligned}|\langle S_N^* S_N(f(\xi)d\overline{\xi}), f(\xi)d\overline{\xi}\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}| &= \frac{m_{d+1}}{d!}\|f\|^2_{\mathcal{F}}\left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)\\ &\simeq \frac{m_{d+1}}{h_d d!}\left(1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right),\end{aligned}$$

où pour deux suites de nombres positifs $\{U_d\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{V_d\}_{n\in\mathbb{N}}$, la notation $U_d \simeq V_d$ signifie qu'il existe deux constantes strictement positives $c_1$ et $c_2$ telles que

$$c_1 V_d \leq U_d \leq c_2 V_d \text{ pour tout } d \in \mathbb{N}.$$

Ainsi le lemme est démontré. □

## 3.3 Démonstrations des principaux théorèmes

En utilisant les sommes directes de (3.2.11) et les projections correspondantes, on peut décomposer $S$ sous la forme $S = S\pi_N + S_N(I - \pi_N)$. L'opérateur $S\pi_N$ étant un opérateur de rang fini, on voit que $S$ est borné si et seulement si $S_N$ l'est, $S$ est compact si et seulement si $S_N$ l'est et $S$ est dans une classe de Schatten si et seulement si $S_N$ l'est également. C'est pourquoi, il nous suffit de montrer les résultats pour l'opérateur $S_N$.

**Démonstration du théorème 3.1.1.** Supposons que $S_N : \mathcal{D}om(S_N) \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ est borné. L'opérateur $S_N$ se prolonge donc par continuité à l'espace de Hilbert $\mathcal{R}_N^{(0,1)}$, clôture de $\mathcal{D}om(S_N)$. D'après la proposition 2.1.2, il s'ensuit que l'opérateur $S_N^* S_N$ est également borné sur $\mathcal{R}_N^{(0,1)}$. Ainsi, puisque $S_N^* S_N$ est un opérateur auto-adjoint, on a en vertu de la proposition 2.1.4 :

$$\sup_{d\geq N,\, h_d\neq 0} \quad \sup_{\substack{u\,\in\,\mathcal{H}_d^{(0,1)},\\ \|u\|_{\mathcal{H}^{(0,1)}}\,=\,1}} |\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}| < \infty.$$

Ceci, combiné avec le lemme 3.2.8, implique que (3.1.2) a lieu pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$.

Réciproquement, supposons que (3.1.2) a lieu pour tout $d \geq N$ tel que $h_d > 0$. On voit alors, d'après le lemme 3.2.9, que

$$\begin{aligned}&\sup_{d\geq N,\, h_d\neq 0} \quad \sup_{\substack{u\,\in\,\mathcal{H}_d^{(0,1)},\\ \|u\|_{\mathcal{H}^{(0,1)}}\,=\,1}} |\langle S_N^* S_N(u), u\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}|\\ &= \sup_{d\geq N,\, h_d\neq 0} \quad \sup_{\substack{u\,\in\,\mathcal{H}_d^{(0,1)},\\ \|u\|_{\mathcal{H}^{(0,1)}}\,=\,1}} \|S_N(u)\|^2_{\mathcal{H}^{(0,1)}} < \infty,\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur $S_N$ est borné. Ceci complète la preuve du théorème. □

Nous supposons désormais que $S_N$ est borné et donc admet un prolongement continu, noté encore $S_N$, défini sur la clôture de $\mathcal{D}om(S_N)$, qui est un espace de Hilbert.

**Démonstration du théorème 3.1.2.** D'après la proposition 2.2.1, $S_N$ est compact si et seulement si $S_N^* S_N$ est compact. Par conséquent, il nous suffit de démontrer le résultat du théorème 3.1.2 pour l'opérateur $S_N^* S_N$.

Supposons tout d'abord que $S_N^* S_N$ est compact. Alors, d'après la proposition 2.2.2, on a

$$\lim_{d\to\infty,\, h_d>0} |\langle S_N^* S_N(f(\xi)d\overline{\xi}_k), f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}| = 0$$

pour tout vecteur unitaire $f$ de $\mathcal{H}_d$ et $k = 1, \ldots, n$. Par le lemme 3.2.8, ceci implique que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!} \left( d \left( 1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}} \right) + (n-1) \right) = 0$$

et le sens « seulement si » du théorème 3.1.2 est démontré.

Réciproquement, supposons que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!} \left( d \left( 1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}} \right) + (n-1) \right) = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $d \geq N$ et si $Q_d$ est la projection orthogonale de $\mathcal{H}^{(0,1)}$ sur $\bigoplus_{l\geq d} \mathcal{H}_l^{(0,1)}$, alors le lemme 3.2.9 entraîne l'existence d'une constante strictement positive $C$

$$\|Q_d S_N^* S_N Q_d\| \leq C \sup_{l\geq d} \frac{m_{l+1}}{h_l(n+l)!} \left( l \left( 1 - \frac{m_l^2}{m_{l-1}m_{l+1}} \right) + (n-1) \right) < \epsilon$$

pour $d$ suffisamment grand. En combinant cette dernière inégalité avec la proposition 2.2.2, on obtient que $S_N^* S_N$ est compact. Ainsi le théorème 3.1.2 est démontré. □

Nous supposons désormais que l'opérateur $S_N$ est compact.

**Démonstration du Théorème 3.1.3.** Supposons que $p > 0$ et que (3.1.4) a lieu. Le lemme 3.2.7 implique que pour tout $d \geq N$, le sous-espace $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ est stable par l'opérateur $S_N^* S_N$. C'est pourquoi, d'après le théorème 2.2.1, il existe pour tout $d \geq N$, des réels strictement positifs $\{\lambda_{j,d}\}_{1\leq j\leq \dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}}$ et une famille orthonormale $\{u_{j,d}\}_{1\leq j\leq \dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}}$ de $\mathcal{H}_d^{(0,1)}$ tels que

$$S_N^* S_N(f) = \sum_{d=N}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}} \lambda_{j,d} \langle u_{j,d}, f\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} u_{j,d}$$

pour tout $f \in \mathcal{H}^{(0,1)}$. De plus, $\{\lambda_{j,d}\}_{1\leq j\leq \dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}}$ est la suite des valeurs propres de $S_N^* S_N$ et on a

$$\langle S_N^* S_N(u_{j,d}),u_{j,d}\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} = \lambda_{j,d}$$

pour tout $1 \leq j \leq \dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}$ et tout $d \geq N$. Le lemme 3.2.9 entraîne que

$$\begin{aligned}\sum_{d=N}^{+\infty}\sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}} \lambda_{j,d}^{\frac{p}{2}} &= \sum_{d=N}^{+\infty}\sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_d^{(0,1)}} \langle S^*S(u_{j,d}),u_{j,d}\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C\sum_{d=N}^{+\infty} n\dim \mathcal{H}_d \left[\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right)\right]^{\frac{p}{2}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ceci implique que $S_N$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p({\mathcal{R}_N}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$ et par conséquent, $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$.

Réciproquement, supposons tout d'abord que $n = 1$, $p > 0$ et $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$. D'après le lemme 3.2.7, nous voyons que pour $d \geq N$ tel que $h_d > 0$, la $(0,1)-$forme $\frac{z^d}{\|z^d\|}d\overline{z}$ est un vecteur propre de $S_N^*S_N$. Si $\lambda_d$ est la valeur propre associée, alors les lemmes 3.2.8 et 3.2.9 donnent que

$$\lambda_d \simeq \frac{m_{d+1}}{h_d d!}\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)$$

et ainsi on obtient (3.1.4).

Désormais on suppose que $n \geq 2$, $p \geq 2$ et que l'opérateur $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}^{(0,1)},L^2(\Omega,\mu))$. Notons $E$ la mesure spectrale de l'opérateur auto-adjoint $S_N^*S_N$. Pour $d \geq N$, considérons une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{H}_d$. En appliquant le corollaire 2.1.1 et l'inégalité de Jensen, on voit que pour tout $k = 1,\ldots,n$ et tout $f \in \mathcal{B}_d$, on a

$$\begin{aligned}|\langle S_N^*S_N(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}|^{p/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} t \quad d\langle E_t\,(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}\right)^{p/2} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} t^{p/2} \quad d\langle E_t\,(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}} \\ &= \langle (S_N^*S_N)^{p/2}(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}.\end{aligned}$$

En vertu du corollaire 2.3.1, l'inégalité précédente implique que

$$\sum_{f,k}\langle S_N^*S_N(f(\xi)d\overline{\xi}_k),f(\xi)d\overline{\xi}_k\rangle_{\mathcal{H}^{(0,1)}}^{p/2} < \infty.$$

Ceci, combiné avec lemme 3.2.8, donne que

$$\sum_{d=N,h_d>0}^{+\infty} \dim \mathcal{H}_d \left[\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right)\right]^{\frac{p}{2}} < \infty.$$

Ainsi (3.1.4) a lieu et la preuve du théorème 3.1.3 est maintenant complète. $\square$

## 3.4 Applications et remarques

Dans cette dernière partie, nous donnons des exemples d'applications de nos résultats.

Commençons ce paragraphe par quelques rappels et notations. La fonction $\Gamma$ est définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

De plus, pour tout $x > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.
La fonction $\beta$ définie par

$$\beta(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{pour tous } x,y > 0, \tag{3.4.15}$$

vérifie l'identité

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{pour tous } x,y > 0. \tag{3.4.16}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ désigne la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Dans le cas particulier où $n = 1$, la boule unité de $\mathbb{C}$ est appelée disque unité et on la note $\mathbb{D}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la mesure $d\mu_s(z) = (1 - |z|^2)^s d\nu(z)$, où $s > -1$ et $d\nu$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{B}_n$.
Pour $m \geq 0$, considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_m$ des fonctions holomorphes $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ sur $\mathbb{B}_n$, dont le développement en série entière satisfait

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_\alpha|^2 \alpha! (|\alpha| + m)}{\Gamma(|\alpha| + m + 1)} < \infty.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}_m$ du produit scalaire $\langle f,g \rangle_{\mathcal{H}_m} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! (|\alpha| + m)}{\Gamma(|\alpha| + m + 1)}$ pour $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ et $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha$. On note $\mathcal{H}_m^{(0,1)}$ l'espace de Hilbert des (0,1)-formes à coefficients dans $\mathcal{H}_m$.

Dans ce cas, la suite $\{h_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ définie par

$$h_d := \frac{1}{\Gamma(d+m)}, \quad d \in \mathbb{N},$$

satisfait (3.1.1) par rapport au produit scalaire de $\mathcal{H}_m$.

En passant en coordonnées polaires, on voit grâce à (3.4.15) et (3.4.16) que, pour $d \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre $d$ de la mesure $\mu_s$ est donné par

$$\begin{aligned} m_d(\mu_s) = m_d &= \int_{\mathbb{B}_n} |z|^{2d}(1-|z|^2)^s d\nu(z) \\ &= \int_0^1 r^{2n+2d-1}(1-r^2)^s dr \\ &= \frac{\Gamma(s+1)(d+n-1)!}{\Gamma(d+n+s+1)}. \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Ainsi, pour $d \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!} = \frac{\Gamma(d+m)}{\Gamma(d+n+s+2)}$$

et

$$1 - \frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}} = \frac{s+1}{(d+n)(d+n+s)},$$

de telle sorte que par la formule de Stirling, $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$, on obtient

$$\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right) \simeq d^{m-n-s-2}\left(\frac{1}{d}+(n-1)\right).$$

D'après le théorème 3.1.1, il s'ensuit que quand $n = 1$, l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est borné de $\mathcal{H}_m^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{D},\mu_s)$ si et seulement si $m \leq s+4$, tandis que pour $n \geq 2$, l'opérateur $S$ est borné de $\mathcal{H}_m^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$ si et seulement si $m \leq n+2+s$.

Le théorème 3.1.2 montre également que quand $n = 1$, l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}_m^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{D},\mu_s)$ si et seulement si $m < s+4$, alors que lorsque $n \geq 2$, l'opérateur $S$ est compact de $\mathcal{H}_m^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$ si et seulement si $m < n+2+s$.

En outre l'application du théorème 3.1.3 à ce cas donne le corollaire suivant :

**Corollaire 3.4.1.** *Supposons que $m \geq 0$ et $p > 0$.*

*Si $n = 1$ et $m < s+4$, alors l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m^{(0,1)},L^2(\mathbb{D},\mu_s))$ si et seulement si*

$$p > \frac{2}{4+s-m}.$$

*Si $n \geq 2$, $p \geq 2$ et $m < n+2+s$, alors l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m^{(0,1)},L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s))$ si et seulement si*

$$p > \frac{2n}{n-m+s+2}.$$

Pour des choix particuliers du paramètre $m$, on obtient ainsi les résultats pour des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques comme des espaces de Bergman à poids, l'espace de Hardy et l'espace invariant de Möbius.

Pour $r > -1$, l'espace de Bergman à poids noté $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n,\mu_r)$ est l'espace des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_r)$.
Si $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ appartient à $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n,\mu_r)$ alors :

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{B}_n,\mu_r)} = \Gamma(n+r+1)\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|a_\alpha|^2\alpha!}{\Gamma(|\alpha|+r+n+1)}.$$

Ainsi, pour $n < m \leq n+1$, on a $\mathcal{H}_m = \mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n,\mu_{m-n-1})$.

Par conséquent, pour $-1 < r \leq 0$ et $s > -1$, l'opérateur $S$ solution canonique du $\overline{\partial}$ de $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n,\mu_r)$ dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$ est borné et compact. De plus, on obtient que pour $n = 1$ et $p > 0$ (respectivement $n \geq 2$ et $p \geq 2$), $S$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > \frac{2}{s+2-r}$ (respectivement $p > \frac{2n}{s+1-r}$).

L'espace de Hardy sur $\mathbb{B}_n$, noté $H^2(\mathbb{B}_n)$, est constitué des fonctions holomorphes $f$ sur $\mathbb{B}_n$ telles que

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{B}_n)} := \sup_{0<r<1}\int_{\mathbb{S}_n}|f(r\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Soit une fonction $f \in H^2(\mathbb{B}_n)$. On sait que pour presque tout $\zeta \in \mathbb{S}_n$, $f$ admet une limite non-tangentielle en $\zeta$ notée $f^*(\zeta)$. De plus on a l'identité suivante :

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{B}_n)} = \int_{\mathbb{S}_n}|f^*(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta).$$

Ainsi, en vertu de la proposition 3.2.2, on obtient pour $f \in H^2(\mathbb{B}_n)$ telle que
$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ :

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{B}_n)} = (n-1)!\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|a_\alpha|^2\alpha!}{\Gamma(|\alpha|+n)}.$$

Cette dernière égalité nous donne $\mathcal{H}_n = H^2(\mathbb{B}_n)$.

Ainsi, pour $s > -1$, l'opérateur $S$ solution canonique du $\overline{\partial}$ de $H^2(\mathbb{B}_n)^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$ est borné et compact. En outre, pour $n = 1$ et $p > 0$ (respectivement $n \geq 2$ et $p \geq 2$), $S$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > \frac{2}{s+3}$ (respectivement $p > \frac{2n}{s+2}$).

Pour plus d'informations au sujet des espaces de Bergman à poids et des espaces de Hardy, se référer à [51].

On désigne par $\mathcal{A}ut(\mathbb{B}_n)$ le groupe de Möbius des applications biholomorphes de $\mathbb{B}_n$ dans $\mathbb{B}_n$. Soit $H$ un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur $\mathbb{B}_n$ tel que l'espace des polynômes holomorphes est dense dans $H$. On dit que $H$ est Möbius

invariant si $f \circ \varphi \in H$ et $\|f \circ \varphi\|_H = \|f\|_H$, pour toute fonction $f \in H$ et toute transformation de Möbius $\varphi \in \mathcal{A}ut(\mathbb{B}_n)$.
Dans [50], Kehe Zhu montre qu'il existe un unique espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ qui soit Möbius invariant. Cet espace est appelé l'espace invariant de Möbius et on le désignera par $\mathcal{M}_n$. Il est constitué des fonctions holomorphes $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ sur $\mathbb{B}_n$ dont le développement en série entière satisfait

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{|a_\alpha|^2 \alpha! |\alpha|}{|\alpha|!} < \infty.$$

L'espace invariant de Möbius est muni du produit scalaire hermitien

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{M}_n} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! |\alpha|}{|\alpha|!}$$

pour $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ et $g = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha$ dans $\mathcal{M}_n$.
Dans le cas de la dimension 1, l'espace invariant de Möbius correspond à l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$. On rappelle que l'espace de Dirichlet est constitué des fonctions holomorphes $f$ sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, d\nu(z) < \infty.$$

L'espace de Dirichlet est muni du produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)} d\nu(z) \quad \text{pour tous } f,g \text{ dans } \mathcal{D}.$$

Il est clair que $\mathcal{H}_0$ est l'espace invariant de Möbius.

Pour $s > -1$, l'opérateur $S$ solution canonique du $\overline{\partial}$ de $\mathcal{M}_n^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$ est borné et compact. Pour $n = 1$ et $p > 0$ (respectivement $n \geq 2$ et $p \geq 2$), $S$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > \frac{2}{s+4}$ (respectivement $p > \frac{2n}{s+2+n}$).

Notons que lorsque $m = n + 1$ et $s = 0$, la condition dans le corollaire 3.4.1 est équivalente au fait que pour $n \geq 2$, la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_{n+1}, L^2(\mathbb{B}_n,\nu))$ contienne des opérateurs de Hankel de symbole antihilomorphe non triviaux (voir [1], [22], [48] et [47]). Pour des paramètres $m \neq n + 1$, on ne sait pas si le résultat est encore vrai. Dans le chapitre suivant, nous démontrerons cette propriété dans le cas d'une variable.

Nos résultats s'appliquent également au cas particulier où $\mathcal{H}$ est un espace de Sobolev de fonctions holomorphes ou un espace de Hardy-Sobolev.

On désigne par $R$ l'opérateur de dérivée radiale $R := \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$. Pour $r \in \mathbb{R}$, la classe de Hardy-Sobolev $H_r^2(\mathbb{B}_n)$ est l'espace des fonctions holomorphes $f$ sur $\mathbb{B}_n$

dont la dérivée fractionnelle $(1+R)^r f$ appartient à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{B}_n)$. On munit $H^2_r(\mathbb{B}_n)$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_{H^2_r(\mathbb{B}_n)} := \langle (1+R)^r f,(1+R)^r g\rangle_{H^2(\mathbb{B}_n)}$$

pour tous $f,g \in H^2_r(\mathbb{B}_n)$.
On considère la famille $\{d\nu_q\}_{q>0}$ de mesures de probabilité sur $\overline{\mathbb{B}_n}$, où $d\nu_q$ est définie par :

$$d\nu_q(z) := \pi^{-n}\frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(q)}(1-|z|^2)^{q-1}d\nu(z).$$

Par intégration en coordonnées polaires il vient que lorsque $q \to 0^+$, la suite des mesures $d\nu_q$ sur $\overline{\mathbb{B}_n}$ converge faiblement vers la mesure de probablité $d\sigma$ sur $\mathbb{S}_n$. Par suite, on peut définir $d\nu_0$ comme $d\sigma$.
Pour $r \in \mathbb{R}$ et $q \geq 0$, on désigne par $\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$ l'espace constitué des fonctions holomorphes $f$ sur $\mathbb{B}_n$ telles que $(1+R)^r f \in L^2(\mathbb{B}_n,d\nu_q)$. On munit $\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$ du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)} := \langle (1+R)^r f,(1+R)^r g\rangle_{L^2(\mathbb{B}_n,d\nu_q)},$$

pour tous $f,g \in \mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$. Remarquons que $\mathcal{A}^2_{0,r}(\mathbb{B}_n) = H^2_r(\mathbb{B}_n)$. Nous avons pour $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ appartenant à $\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$ :

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)} = \Gamma(n+q)\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|a_\alpha|^2\alpha!(|\alpha|+1)^r}{\Gamma(n+q+|\alpha|)}.$$

On en déduit que si $0 < m < n$, alors $\mathcal{H}_m = \mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$ pour tout $(q,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ tel que $r = q+n-m$.

Dans ce cas, la suite $\{h_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ définie par

$$h_d := \frac{(d+1)^r}{\Gamma(d+n+q)},\ \ d\in\mathbb{N},$$

satisfait (3.1.1) par rapport au produit scalaire de l'espace de Sobolev de fonctions holomorphes $\mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)$.
Si on considère de nouveau la mesure $\mu_s$, où $s > -1$, on obtient pour $d \in \mathbb{N}$:

$$\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!} = \frac{\Gamma(s+1)}{2}\frac{\Gamma(d+n+q)}{(d+1)^r\Gamma(d+n+s+2)} \simeq d^{\ q-s-2-r}$$

et

$$1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}} = \frac{s+1}{(d+n)(d+n+s)}.$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{m_{d+1}}{h_d(n+d)!}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right) \simeq d^{\ q-s-2-r}\left(\frac{1}{d}+(n-1)\right).$$

Ainsi, pour $(q,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tel que $0 < r - q < n$, on obtient pour $S : \mathcal{A}^2_{q,r}(\mathbb{B}_n)^{(0,1)} \longrightarrow L^2(\mathbb{B}_n,\mu_s)$, les caractérisations suivantes :

pour $n = 1$, $S$ est borné si et seulement si $q \leq s + r + 3$, compact si et seulement si $q < s+r+3$, et pour $p > 0$, $S$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > \frac{2}{s+r+3-q}$;

pour $n \geq 2$, $S$ est borné si et seulement si $q \leq s + r + 2$, compact si et seulement si $q < s+r+2$, et pour $p \geq 2$, $S$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten si et seulement si $p > \frac{2n}{s+r+2-q}$.

Enfin, on s'intéresse à une classe d'espaces de Hilbert $H_\varphi$, pour des fonctions $\varphi$ à croissance suffisamment rapide. Plus précisément, étant donnée une fonction $\varphi$ positive sur $[0, +\infty[$ telle que

$$m_d(\varphi) := \int_0^{+\infty} t^{2n+2d-1} e^{-\varphi(t)} dt$$

est fini pour tout entier positif $d$, on considère la mesure $d\mu_\varphi(z) = e^{-\varphi(|z|)} d\nu(z)$, où $\nu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$.
Le moment d'ordre $d$ de la mesure $\mu_\varphi$ est $m_d(\varphi)$.
Notons $H_\varphi$ l'espace constitué des fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$ qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $\mu_\varphi$, muni du produit scalaire hermitien de $L^2(\mathbb{C}^n,\mu_\varphi)$.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = d$, on a par passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \|z^\alpha\|^2_{\mathcal{H}_\varphi} &= \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-\varphi(|z|)} d\nu(z) \\ &= \int_0^\infty r^{2n+2d-1} e^{-\varphi(r)} dr \int_{\mathbb{S}_n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la suite $\{h_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ est choisie de la manière suivante :

$$h_d(\varphi) := \frac{(n-1)!}{(n+d-1)!} m_d(\varphi) \quad \text{pour tout } d \in \mathbb{N}. \tag{3.4.18}$$

Si $S$ est l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ de $H_\varphi^{(0,1)}$ dans $L^2(\mathbb{C}^n,\mu_\varphi)$, alors en appliquant (3.4.18) et les théorèmes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 à cet exemple, on obtient les corollaires suivants :

**Corollaire 3.4.2.** *L'opérateur $S$ est borné si et seulement si*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{m_{d+1}(\varphi)}{d m_d(\varphi)} \left( d \left( 1 - \frac{m_d^2(\varphi)}{m_{d-1}(\varphi) m_{d+1}(\varphi)} \right) + (n-1) \right) < +\infty.$$

**Corollaire 3.4.3.** *L'opérateur $S$ est compact si et seulement si*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{m_{d+1}(\varphi)}{d m_d(\varphi)} \left( d \left( 1 - \frac{m_d^2(\varphi)}{m_{d-1}(\varphi) m_{d+1}(\varphi)} \right) + (n-1) \right) = 0.$$

**Corollaire 3.4.4.** *Si $p > 0$ et*

$$\sum_{d\in\mathbb{N}} d^{n-1}\left[\frac{m_{d+1}(\varphi)}{dm_d(\varphi)}\left(d\left(1-\frac{m_d^2(\varphi)}{m_{d-1}(\varphi)m_{d+1}(\varphi)}\right)+(n-1)\right)\right]^{\frac{p}{2}} < +\infty \tag{3.4.19}$$

*alors l'opérateur $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_\varphi^{(0,1)},L^2(\mathbb{C}^n,\mu_\varphi))$.*
*Supposons que soit $n = 1$ et $p > 0$, soit $n \geq 2$ et $p \geq 2$. Si l'opérateur $S$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_\varphi^{(0,1)},L^2(\mathbb{C}^n,\mu_\varphi))$, alors on a (3.4.19).*

On peut prendre comme exemples de telles fonctions les fonctions $\varphi_m$ définies par $\varphi_m(t) = t^m$, pour tout $t \geq 0$, où $m$ est un nombre réel strictement positif. Pour $m > 0$, l'espace $H_{\varphi_m}$ correspond à l'espace de Fock, noté $\mathcal{F}_m$, constitué des fonctions entières $f$ sur $\mathbb{C}^n$ telles que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^m} d\nu(z) < \infty.$$

Se référer à [42] pour la définition des espaces de Fock.

Dans ce cas, les moments de la mesure sont donnés par

$$m_d = \int_0^\infty t^{2n+2d-1} e^{-t^m} dt = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{2n+2d}{m}\right)$$

Ainsi, en appliquant la formule de Stirling, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{m_{d+1}}{dm_d} &= \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2d+2}{m}\right)}{d\ \Gamma\left(\frac{2n+2d}{m}\right)}\\ &\simeq \left(\frac{2n+2d}{m}\right)^{\frac{2}{m}-1}.\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le développement limité suivant (voir [29]) :

$$\frac{\Gamma(x+\lambda)}{\Gamma(x+\gamma)} \simeq x^{\lambda-\gamma}\left(1+\frac{(\lambda-\gamma)(\lambda+\gamma-1)}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

pour tout $x > 0$ et tous $\lambda,\gamma$ tels que $\lambda \geq -x$ et $\gamma \geq -x$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{m_d^2}{m_{d+1}m_{d-1}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2d}{m}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2n+2n-2}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2n+2d+2}{m}\right)}\\ &\simeq 1-\frac{6}{m(n+d)}+O\left(\frac{1}{d^2}\right).\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\frac{m_{d+1}}{dm_d}\left(d\left(1-\frac{m_d^2}{m_{d-1}m_{d+1}}\right)+(n-1)\right) \simeq d^{\frac{2}{m}-1}.$$

D'après cet équivalent et le corollaire 3.4.2, on voit que $S$ est borné si et seulement si $m \geq 2$. Le corollaire 3.4.3 montre de plus que $S$ est compact si et seulement si $m > 2$ et finalement, le corollaire 3.4.4 implique que $S$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{F}_m^{(0,1)}, L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{\varphi_m}))$ si et seulement si $p > \frac{2mn}{m-2}$.

En particulier, si $m = 2$, alors $S$ est borné mais pas compact et on retrouve comme conséquence le théorème 2 de [20].

# Chapitre 4

# Propriétés spectrales des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe

Dans ce chapitre, nous considérons une classe d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}_m$ de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ pour $0 \leq m \leq 1$. Pour des choix particuliers du paramètre $m$ on retrouve des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques comme l'espace de Hardy, l'espace de Dirichlet et des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe définis sur l'espace $\mathcal{H}_m$ à valeurs dans l'espace $L^2(\mathbb{D})$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous donnons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante pour que la $p^{\grave{e}me}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ contienne un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Ensuite, nous nous intéressons au lien entre le comportement au bord de la fonction holomorphe $f$ et la nature de l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ qui lui est associé. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. En outre, dans le cas où $0 < m \leq 1$, nous montrons que si $H_{\bar{f}}$ est borné (respectivement compact), alors $f$ appartient à un espace de Bloch pondéré (respectivement à un petit espace de Bloch). Enfin, nous prouvons que si $H_{\bar{f}}$ est dans la $p^{\grave{e}me}$ classe de Schatten, alors $f$ appartient à un espace de Besov.

## 4.1 Introduction et énoncé des résultats

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et soit $\nu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. On désigne par $L^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $\nu$. L'espace $L^2(\mathbb{D})$ est muni du produit scalaire standard.

Soit $0 \leq m \leq 2$. On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_m$ constitué des fonctions holomorphes $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k$ sur $\mathbb{D}$ dont le développement en série entière satisfait :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|^2 k!\,(k+m)}{\Gamma(k+m+1)} < \infty.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}_m$ du produit scalaire hermitien

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}_m} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k\,\overline{b_k}\,k!\,(k+m)}{\Gamma(k+m+1)} \quad \text{pour tous } f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k \text{ et } g = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k \text{ dans } \mathcal{H}_m.$$

Remarquons que les paramètres $m = 1$ et $m = 0$ correspondent, respectivement, aux cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Hardy et l'espace de Dirichlet. En reprenant les notations du paragraphe 3.4, on obtient que lorsque $1 < m \leq 2$, l'espace $\mathcal{H}_m$ est l'espace Bergman à poids $\mathcal{A}^2(\mathbb{D},\mu_{m-2})$ et quand $0 < m < 1$, l'espace $\mathcal{H}_m$ coïncide avec l'espace de Sobolev de fonctions holomorphes $\mathcal{A}^2_{m,1}(\mathbb{D})$.

Soit $\mathcal{D}_m$ le sous-espace dense dans $\mathcal{H}_m$ constitué de tous les polynômes holomorphes de $\mathcal{H}_m$. On désigne par $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman constitué des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{D})$. L'espace $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D})$ (voir [49]). La projection de Bergman $P$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Étant donnée une fonction $f$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$ est l'opérateur $H_{\bar{f}}$ de $\mathcal{D}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$, qui à un polynôme $g \in \mathcal{D}_m$ associe :

$$H_{\bar{f}}(g) := (I - P)(\bar{f}g),$$

où $I$ est l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{D})$.
Si l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ est un opérateur borné, on notera encore $H_{\bar{f}}$ son prolongement continu à l'espace $\mathcal{H}_m$ tout entier.

Les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur les espaces de Bergman à poids de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ ont été étudiées par S. Axler ([3]), J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre ([2]) et S. Janson ([23]) dans le cas d'une variable, et par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson et J. Peetre ([1]), R. Wallsten ([45]), K. T. Hahn et E. H. Youssfi ([22]) et K. Zhu ([48],[47]) dans le cas de plusieurs variables. Ainsi, le cas où $\mathcal{H}_m$ est un espace de Bergman à poids, c'est-à-dire le cas où $1 < m \leq 2$ a déjà été traité par S. Axler ([3]), J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre ([2]) et S. Janson ([23]).

Dans ce chapitre, nous poursuivons deux objectifs. Dans un premier temps, nous souhaitons savoir si, contrairement au cas des opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö de $L^2(\mathbb{S}_1,\sigma)$ dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, il existe un phénomène dit de « coupure » pour les classes de Schatten. En particulier, nous cherchons à déterminer les classes de Schatten qui ne contiennent pas d'opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Dans un second temps, nous étudions le lien entre le comportement au bord du disque de la fonction $f$ et la nature de l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$. Plus précisément, nous souhaitons savoir pour quel type de fonction

$f$, l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est borné ou compact; en ce qui concerne les classes de Schatten, nous désirons établir la connexion entre la croissance de $f$ et la taille des valeurs singulières de $H_{\bar{f}}$.

En ce qui concerne le phénomène de « coupure », on remarque que la condition dans le corollaire 3.4.1 est équivalente pour $n = 1$, $s > -1$ et $1 < m \leq s+4$ (voir [2] et [23]), et $n \geq 2$, $s = 0$ et $m = n+1$ (voir [47] et [22]), au fait que la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m^{(0,1)}, L^2(\mathbb{B}_n, \mu_s))$ contienne un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Ces résultats correspondent au cas où $\mathcal{H}_m$ est un espace de Bergman à poids. Dans les autres cas, on ne sait pas si ce résultat est encore vrai. On peut noter que, puisque l'appartenance de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ à $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m^{(0,1)}, L^2(\mathbb{B}_n, \mu_s))$ est équivalente à celle des opérateurs de Hankel $H_{\bar{z}_j}$ à la classe $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{B}_n, \mu_s))$ pour tout $1 \leq j \leq n$, cette condition est suffisante. L'objectif principal de ce chapitre est de démontrer cette propriété dans le cas $n = 1$, $s = 0$ et $0 \leq m \leq 1$. Dans les cas déjà obtenus, les auteurs utilisaient principalement que l'appartenance d'un opérateur de Hankel à une classe de Schatten donnée était invariante sous l'action du groupe de Möbius. Ici, comme notre espace $\mathcal{H}_m$ n'est plus un espace de Bergman à poids, cet argument ne convient plus et nous devons faire appel à des outils différents. Énonçons le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 4.1.1.** *Pour* $0 \leq m \leq 1$ *et* $p > 0$, *la* $p^{\text{ème}}$ *classe de Schatten de* $\mathcal{H}_m$ *dans* $L^2(\mathbb{D})$ *contient un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial si et seulement si* $p > \frac{2}{4-m}$.

Ce théorème implique en particulier que la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ contient un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial si et seulement si $p > \frac{1}{2}$ dans le cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Dirichlet, et si et seulement si $p > \frac{2}{3}$ dans le cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Hardy.

Puisque le résultat concernant la « coupure » dans le cas $1 < m \leq 2$ s'étend au cas $0 \leq m \leq 1$, nous sommes naturellement amenés à regarder si ce phénomène a également lieu pour la continuité, la compacité et l'appartenance aux classes de Schatten. Rappelons les caractérisations obtenues dans le cas $1 < m \leq 2$ :

**Théorème (S. Axler, J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre et S. Janson)** *Soit* $1 < m \leq 2$.
$H_{\bar{f}}$ *est borné si et seulement si* $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| < \infty$ ;

$H_{\bar{f}}$ *est compact si et seulement si* $\lim_{|z| \to 1^-} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| = 0$ ;

*pour* $p > \frac{2}{4-m}$, $H_{\bar{f}}$ *appartient à* $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ *si et seulement si*

$$\int_{z \in \mathbb{D}} \left( (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| \right)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \, d\nu(z) < \infty.$$

Nous cherchons donc désormais à savoir si les propriétés précédentes sont encore vraies dans le cas $0 \leq m < 1$.

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$ pour que l'opérateur $H_{\bar{f}}$ de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. De plus, dans le cas où $0 < m \leq 1$, nous établissons des conditions nécessaires sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ pour $p > \frac{2}{4-m}$.

Les deux propositions suivantes établissent des conditions nécessaires sur $f$ pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ soit borné, puis compact.

**Proposition 4.1.1.** *Soit $0 < m \leq 1$ et soit $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Si l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}} : \mathcal{D}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ est borné, alors*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| < \infty.$$

**Proposition 4.1.2.** *Soient $0 < m \leq 1$ et $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Si l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ est compact, alors*

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| = 0.$$

Les résultats concernant les classes de Schatten font intervenir les espaces $B_p^m$, définis comme suit.

Pour $0 < m \leq 1$ et $p > \frac{2}{4-m}$, on désigne par $B_p^m$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ vérifiant :

$$\int_{z\in\mathbb{D}} \left((1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)|\right)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

De plus, on note $B_2^0$ l'espace constitué des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ vérifiant :

$$\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 \ \ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right) |f'(z)|^2\, d\nu(z) < \infty.$$

Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que l'opérateur $H_{\bar{f}}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.

**Théorème 4.1.2.** *Soit $0 \leq m \leq 1$ et soit une fonction $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telle que l'opérateur $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ soit compact. L'opérateur $H_{\bar{f}}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $f$ appartient à $B_2^m$.*

Ce théorème montre que les résultats concernant l'appartenance à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt obtenus dans le cas $1 < m \leq 2$ s'étendent au cas

$0 < m < 1$. Par contre, dans le cas $m = 0$, c'est-à-dire le cas où $\mathcal{H}_m$ est l'espace de Dirichlet, la condition nécessaire et suffisante fait intervenir un terme $\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$ qui provient du noyau de Dirichlet.

Sous les hypothèses $0 < m \leq 1$ et $p > \frac{2}{4-m}$, nous obtenons une condition nécessaire sur $f$ pour que $H_{\bar{f}}$ appartienne à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$.

**Proposition 4.1.3.** *Soient* $0 < m \leq 1$ , $p > \frac{2}{4-m}$ *et* $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. *Si l'opérateur* $H_{\bar{f}} : \mathcal{H}_m \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ *appartient à la* $p^{\grave{e}me}$ *classe de Schatten* $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, *alors* $f$ *appartient à l'espace* $B_p^m$.

Dans le cas $p \geq 2$, la preuve de cette propriété possède l'intérêt de mettre en évidence le lien entre la nature de l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ et son action sur les noyaux reproduisant et dérivé de $\mathcal{H}_m$.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Les paragraphes 4.2 et 4.3 servent à établir le théorème 4.1.1. En effet, la démonstration du théorème 4.1.1 se décompose en deux étapes. Dans le paragraphe 4.2 on montre tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $H_{\bar{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$. Ensuite, dans le paragraphe 4.3, on raisonne par l'absurde. On montre que pour $p \leq \frac{2}{4-m}$, si la classe $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ contient un opérateur de Hankel non trivial, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_{\bar{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$, ce qui contredit le résultat du paragraphe 4.2. Le paragraphe 4.4 contient la preuve des propositions 4.1.1 et 4.1.2 qui sont démontrées simultanément en regardant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_m$. Le paragraphe 4.5 concerne la preuve du théorème 4.1.2, qui est établi en utilisant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur une base orthonormale particulière de $\mathcal{H}_m$. Enfin, les paragraphes 4.6 et 4.7 correspondent à la démonstration de la proposition 4.1.3. En effet, pour la preuve de la proposition 4.1.3, on distingue le cas $p \geq 2$ du cas $2 > p > \frac{2}{4-m}$. Le paragraphe 4.6 traite le cas $p \geq 2$, en considérant l'action de $H_{\bar{f}}$ sur les noyaux reproduisant et dérivé de $\mathcal{H}_m$. Le praragraphe 4.7 traite le cas $2 > p > \frac{2}{4-m}$ par l'étude du petit opérateur de Hankel associé à $H_{\bar{f}}$.

## 4.2 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux opérateurs de Hankel $H_{\bar{z}^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En reprenant les mêmes méthodes que celles utilisées dans [17] et [27], nous parvenons à une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{z}^k}$ soit dans la $p^{\grave{e}me}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$.

Fixons $0 \leq m \leq 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

**Lemme 4.2.1.** *Pour* $d \in \mathbb{N}$ *on a l'identité suivante :*

$$H_{\bar{z}^k}(z^d)(\xi) = \begin{cases} \bar{\xi}^k \xi^d & si \;\; d < k \\ \bar{\xi}^k \xi^d - \dfrac{d+1-k}{d+1} \xi^{d-k} & si \;\; d \geq k. \end{cases}$$

*Preuve.* En vertu du lemme 3.2.1 et par passage en coordonnées polaires, on a pour $d \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$:

$$\left\langle z^d, z^l \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})} := \begin{cases} \dfrac{1}{d+1} & \text{si } \ d = l \\ 0 & \text{si } \ d \neq l. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Pour prouver le lemme 4.2.1, observons tout d'abord grâce à (4.2.1) que le polynôme $\overline{z}^k z^d$ est orthogonal dans $L^2(\mathbb{D})$ à tout polynôme holomorphe, dans le cas où $d < k$, et à tout polynôme holomorphe de degré différent de $d-k$, dans le cas où $d \geq k$. Supposons maintenant que $d \geq k$. Un calcul direct utilisant (4.2.1) donne

$$\begin{aligned} \langle P(\bar{z}^k z^d), z^{d-k} \rangle_{L^2(\mathbb{D})} &= \langle \bar{z}^k z^d, z^{d-k} \rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle z^d, z^d \rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \frac{d+1-k}{d+1} \langle z^{d-k}, z^{d-k} \rangle_{L^2(\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Remarquons que le lemme 4.2.1 implique en particulier que pour chaque polynôme $g \in \mathcal{D}_m$, $H_{\overline{z}^k}(g)$ est un élément polynomial de $L^2(\mathbb{D})$.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{N}_d$ le sous-espace de $\mathcal{H}_m$ constitué des polynômes de degré inferieur ou égal à $d$ et on note $\pi_d$ la projection orthogonale de $\mathcal{D}_m$ sur $\mathcal{N}_d$ .

**Lemme 4.2.2.** *Le domaine $\mathcal{D}om(H^*_{\overline{z}^k})$ de $H^*_{\overline{z}^k}$ contient tous les polynômes.*

*Preuve.* Pour obtenir le lemme, il suffit de montrer que $\mathcal{D}om(H^*_{\overline{z}^k})$ contient les monômes $z^i \overline{z}^j$ pour tous $i,j$ dans $\mathbb{N}$. Fixons donc $i,j$ dans $\mathbb{N}$. Choisissons un entier $l$ tel que $l \geq i+j+2k$. Un calcul utilisant (4.2.1) et le lemme 4.2.1 montre que pour tout $g \in \mathcal{D}_m$, on a :

$$\langle (H_{\overline{z}^k} \circ (I - \pi_l))(g), z^i \overline{z}^j \rangle_{L^2(\mathbb{D})} = 0.$$

En effet, si $g \in \mathcal{D}_m$, alors d'après le lemme 4.2.1, la fonction $[H_{\overline{z}^k} \circ (I - \pi_l)]\, g$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[H_{\overline{z}^k} \circ (I - \pi_l)](g) = \overline{z}^k P + Q,$$

où $P$ et $Q$ sont des polynômes holomorphes ne contenant que des termes homogènes de degré supérieur ou égal à $l+1-k \geq i+j+k+1$.
Il découle de (4.2.1) que

$$\begin{aligned} \langle H_{\overline{z}^k} \circ (I - \pi_l)(g), z^i \overline{z}^j \rangle_{L^2(\mathbb{D})} &= \langle \overline{z}^k P + Q, z^i \overline{z}^j \rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle z^j P, z^k z^i \rangle_{L^2(\mathbb{D})} + \langle z^j Q, z^i \rangle_{L^2(\mathbb{D})} = 0. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur $H_{\overline{z}^k} \circ \pi_l$ est de rang fini, il s'ensuit que

$$|\langle H_{\overline{z}^k}(g), z^i \overline{z}^j \rangle_{L^2(\mathbb{D})}| = |\langle (H_{\overline{z}^k} \circ \pi_l)(g), z^i \overline{z}^j \rangle_{L^2(\mathbb{D})}| \leq C \|g\|_{\mathcal{H}_m},$$

où $C$ est une constante strictement positive qui ne dépend pas de $g$. Ainsi le lemme est prouvé. □

Le lemme 4.2.2 combiné avec lemme 4.2.1 montre que l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$ est bien défini sur $\mathcal{D}_m$.

Le lemme suivant fournit les valeurs singulières de l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$.

**Lemme 4.2.3.** *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le monôme $z^d$ est un vecteur propre de l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$. Plus précisément, on a :*

$$H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}(z^d)(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(d+m)}{d!} \dfrac{1}{d+k+1}\, \xi^d & si \;\; d < k \\ \dfrac{\Gamma(d+m)}{(d+k+1)d!} \dfrac{k^2}{(d+1)^2}\, \xi^d & si \;\; d \geq k. \end{cases}$$

*Preuve.* Soit $d \in \mathbb{N}$. En appliquant (4.2.1) et le lemme 4.2.1, on obtient $\langle H_{\overline{z}^k}(z^d), H_{\overline{z}^k}(z^l)\rangle_{L^2(\mathbb{D})} = 0$ pour tout entier $l$ différent de $d$. En effet, supposons $l \neq d$. D'après le lemme 4.2.1, on peut écrire $H_{\overline{z}^k}(z^d)$ et $H_{\overline{z}^k}(z^l)$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} H_{\overline{z}^k}(z^d) = \overline{z}^k z^d - C_d\, z^{d-k} \\ H_{\overline{z}^k}(z^l) = \overline{z}^k z^l - C_l\, z^{l-k}, \end{cases}$$

où $C_d$ et $C_l$ sont des constantes éventuellement nulles. En utilisant (4.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle H_{\overline{z}^k}(z^d), H_{\overline{z}^k}(z^l)\rangle_{L^2(\mathbb{D})} &= \langle \overline{z}^k z^d - C_d\, z^{d-k}, \overline{z}^k z^l - C_l\, z^{l-k}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle z^{d+k}, z^{l+k}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} - (C_d + C_l)\, \langle z^d, z^l\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad + C_d\, C_l\, \langle z^{d-k}, z^{l-k}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle H_{\overline{z}^k}(z^d), H_{\overline{z}^k}(z^d)\rangle_{L^2(\mathbb{D})} &= \int_{\mathbb{D}} H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)\, \overline{H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)}\, d\nu(w) \\ &= \frac{1}{\|\xi^d\|^2_{\mathcal{H}_m}} \int_{\mathbb{D}} H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)\, \langle \overline{H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)\, \overline{\xi^d}}, \xi^d\rangle_{\mathcal{H}_m}\, d\nu(w) \\ &= \frac{\Gamma(d+m)}{d!} \left\langle \int_{\mathbb{D}} H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)\, \overline{H_{\overline{z}^k}(z^d)(w)}\, d\nu(w)\, \xi^d, \xi^d \right\rangle_{\mathcal{H}_m}. \end{aligned}$$

On en déduit l'identité suivante :

$$H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}(z^d)(\xi) = \left( \frac{\Gamma(d+m)}{d!} \|H_{\overline{z}^k}(z^d)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \right) \xi^d.$$

Or, d'après (4.2.1) et le lemme 4.2.1, on a :
si $d < k$,

$$\|H_{\overline{z}^k}(z^d)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} = \|\overline{z}^k z^d\|^2_{L^2(\mathbb{D})} = \|z^{d+k}\|^2_{L^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{d+k+1},$$

et si $d \geq k$,

$$\begin{aligned}
\|H_{\overline{z}^k}(z^d)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} &= \|\overline{z}^k z^d\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + \left(\frac{d+1-k}{d+1}\right)^2 \|z^{d-k}\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&\quad - \frac{d+1-k}{d+1}\left[\langle \overline{z}^k z^d, z^{d-k}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} + \langle z^{d-k}, \overline{z}^k z^d\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right] \\
&= \|z^{k+d}\|^2_{L^2(\mathbb{D})} + \left(\frac{d+1-k}{d+1}\right)^2 \|z^{d-k}\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&\quad - 2\frac{d+1-k}{d+1}\|z^d\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&= \frac{1}{d+k+1}\frac{k^2}{(d+1)^2}.
\end{aligned}$$

Les calculs précédents donnent finalement le lemme. $\square$

Le lemme suivant est le résultat principal de ce paragraphe. Il traite de la continuité, de la compacité et de l'appartenance aux classes de Schatten de l'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$.

**Lemme 4.2.4.** *Soient $0 \leq m \leq 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ de $\mathcal{D}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ se prolonge en un opérateur borné et compact sur $\mathcal{H}_m$.*
*De plus, pour $p > 0$, l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ appartient à $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$.*

*Preuve.* Soient $0 \leq m \leq 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 4.2.3, nous savons que la suite $\{\lambda_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres de $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$, où $\lambda_d$ est la valeur propre correspondant au vecteur propre $z^d$, est donnée par :

$$\lambda_d = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(d+m)}{d!}\dfrac{1}{d+k+1} & \text{si } \ d<k \\[2ex] \dfrac{\Gamma(d+m)}{d!}\dfrac{1}{d+k+1}\dfrac{k^2}{(d+1)^2} & \text{si } \ d \geq k. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Ainsi, en appliquant la formule de Stirling à (4.2.2), on obtient que pour $d$ suffisamment grand

$$\lambda_d \simeq d^{m-4}. \tag{4.2.3}$$

On déduit de cette estimation que l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ est borné sur $\mathcal{D}_m$ et donc que l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ est lui-même borné sur $\mathcal{D}_m$. En outre, en combinant l'estimation (4.2.3) avec la proposition 2.2.2, on obtient que l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ est compact et par conséquent, en vertu de la proposition 2.2.1, l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ est également compact.
De plus, soit $p > 0$. Par définition, l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ appartient à la $p^{ème}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{d\in\mathbb{N}}(\lambda_d)^{\frac{p}{2}} < +\infty$. Par suite, il découle

de (4.2.3) que $H_{\overline{z}^k} \in \mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$. Le lemme est ainsi démontré. □

Si l'on considère les opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö de $L^2(\partial\mathbb{D},\sigma)$ dans $H^2(\mathbb{D})$, on peut montrer par la même méthode que, pour tout $p > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_{\overline{z}^k} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\partial\mathbb{D},\sigma))$. Par conséquent, il n'existe pas de phénomène de « coupure » pour les opérateurs de Hankel définis via la projection de Szegö.

## 4.3 Preuve du théorème 4.1.1

Notre approche pour démontrer le théorème 4.1.1 est inspirée par l'article [47] de K. Zhu.

Soit $0 \le m \le 1$. Pour $p > 0$, on désigne par $X_p$ l'espace constitué des fonctions $f$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telles que l'opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$ appartient à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$. On pose

$$\|f\|_{X_p} = \|H_{\bar{f}}\|_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))} + |f(0)|$$

pour toute fonction $f$ dans $X_p$.
En vertu de la proposition 2.3.4 et du théorème 2.3.5, $\|.\|_{X_p}$ est une norme sur $X_p$ pour $p \ge 1$ et une quasi-norme sur $X_p$ pour $0 < p < 1$.

Pour prouver le théorème 4.1.1, nous devons montrer que $X_p$ contient une fonction non constante si et seulement si $p > \frac{2}{4-m}$. En effet, un opérateur de Hankel est trivial si et seulement si son symbole est une fonction constante.

Grâce au lemme 4.2.4, nous avons déjà obtenu que si $p > \frac{2}{4-m}$, alors l'espace $X_p$ contient une fonction non constante, puisque, dans ce cas, l'espace $X_p$ contient tous les monômes.

Il nous reste donc à montrer que pour $0 < p \le \frac{2}{4-m}$, l'espace $X_p$ ne contient pas de fonction non constante. Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde. Plus précisément, nous allons montrer que dans ce cas, si $X_p$ contient une fonction non constante, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme $z^k$ est dans $X_p$, ce qui est impossible d'après le lemme 4.2.4.

Nous supposons désormais que $0 < p \le \frac{2}{4-m} < 1$.

**Lemme 4.3.1.** *Soit* $0 < p \le \frac{2}{4-m}$. *L'espace* $(X_p, \|.\|_{X_p})$ *est un espace quasi-Banach.*

*Preuve.* Il faut montrer que $(X_p, \|.\|_{X_p})$ est un espace complet.
Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $X_p$. On veut prouver que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = f_n - f_n(0)$. Les fonctions $h_n$ satisfont $h_n(0) = 0$ et $H_{\overline{h_n}} = H_{\overline{f_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\{H_{\overline{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite de Cauchy

dans $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$. Or, d'après le théorème 2.3.5, l'espace $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ est complet. Par conséquent, il existe un opérateur $T$ dans $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ tel que $\{H_{\overline{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ dans $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$. Ceci implique que $\{H_{\overline{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $T$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$. De plus, si on note $\varphi$ la fonction de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et si on pose $h = \overline{T(\varphi)} \in L^2(\mathbb{D})$, on obtient

$$\|H_{\overline{h_n}}(\varphi) - T(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{D})} = \|\overline{h_n} - T(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{D})} = \|h_n - h\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

L'inégalité ci-dessus et le fait que $\{H_{\overline{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ donnent

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_{L^2(\mathbb{D})} = 0. \tag{4.3.4}$$

Donc la suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h$ dans l'espace fermé $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Il en découle que $h$ appartient à $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.
D'autre part, d'après la définition de la quasi-norme sur $X_p$, la suite $\{f_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\{f_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.
Posons $f = h + \alpha \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. La fonction $f$ appartient à $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ et de plus, $H_{\bar f} = H_{\overline{h}}$. Montrons que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $X_p$ : pour cela, il suffit de prouver que $H_{\overline{h}}$ est égal à $T$. Soit $g$ un polynôme holomorphe dans $\mathcal{D}_m$. Puisque $g$ est borné sur $\mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(H_{\overline{h_n}} - H_{\overline{h}})(g)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} &= \|(I-P)\left[(\overline{h} - \overline{h_n})g\right]\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&\le \|(\overline{h} - \overline{h_n})g\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&\le \left(\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)|\right)^2 \|\overline{h} - \overline{h_n}\|^2_{L^2(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

En combinant l'inégalité ci-dessus avec (4.3.4), on obtient pour tout polynôme holomorphe $g \in \mathcal{D}_m$

$$\lim_{n\to\infty} \|(H_{\overline{h_n}} - H_{\overline{h}})(g)\|_{L^2(\mathbb{D})} = 0.$$

Par unicité de la limite dans $L^2(\mathbb{D})$, $H_{\overline{h}}$ est égal à $T$ sur $\mathcal{D}_m$ et par densité de $\mathcal{D}_m$ dans $\mathcal{H}_m$, il vient que l'opérateur $H_{\overline{h}}$ est en fait l'opérateur $T$. Finalement nous avons montré que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $X_p$. Ainsi toute suite de Cauchy dans $X_p$ converge dans $X_p$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Afin de démontrer le lemme suivant, rappelons maintenant quelques propriétés de l'espace de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Nous renvoyons le lecteur aux références [49] et [39] pour la démonstration de ces résultats.

L'évaluation en un point est une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Ainsi l'espace $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ admet un noyau reproduisant que l'on notera $B$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on désigne par $B_z$ la fonction dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ définie par:

$$B_z(w) = \overline{B(z,w)} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}.$$

En utilisant la représentation du noyau reproduisant suivant une base orthonormale de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, on obtient :

$$B_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} \quad \text{pour tous } z{,}w \text{ dans } \mathbb{D}. \tag{4.3.5}$$

De plus, pour $h \in L^2(\mathbb{D})$ et $z \in \mathbb{D}$, on peut utiliser $B_z$ pour calculer $P(h)(z)$ de la manière suivante :

$$P(h)(z) = \langle P(h),B_z\rangle_{L^2(\mathbb{D})} = \langle h,B_z\rangle_{L^2(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\, h(w)\, d\nu(w). \tag{4.3.6}$$

Pour $\theta \in [0{,}2\pi]$, $q \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, soit $f_\theta^q$ la fonction définie par

$$f_\theta^q(z) = e^{-iq\theta} f(e^{i\theta}z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

**Lemme 4.3.2.** *Soit* $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$. *On a* $f_\theta^q \in X_p$ *et* $\|f_\theta^q\|_{X_p} = \|f\|_{X_p}$ *pour tous* $f \in X_p$, $\theta \in [0{,}2\pi]$ *et* $q \in \mathbb{N}$.

*Preuve.* Soient $f$ dans $X_p$, $\theta \in [0{,}2\pi]$ et $q \in \mathbb{N}$. Il est clair que la fonction $f_\theta^q$ appartient bien à $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Soit $g$ un polynôme dans $\mathcal{D}_m$. En utilisant (4.3.5), (4.3.6) et le changement de variable $w' = we^{i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
H_{\overline{f_\theta^q}}(g)(z) &= \int_{\mathbb{D}} g(w)\left[\overline{f_\theta^q(z) - f_\theta^q(w)}\right] \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\, d\nu(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e^{iq\theta} g(w)\left[\overline{f(ze^{i\theta}) - f(we^{i\theta})}\right] \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\, d\nu(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e^{(q-1)i\theta} g(w'e^{-i\theta})\left[\overline{f(ze^{i\theta}) - f(w')}\right] \frac{1}{\left(1-z\,\overline{w'e^{-i\theta}}\right)^2}\, d\nu(w') \qquad (4.3.7) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e^{(q-1)i\theta} g(w'e^{-i\theta})\left[\overline{f(ze^{i\theta}) - f(w')}\right] \frac{1}{\left(1-ze^{i\theta}\overline{w'}\right)^2}\, d\nu(w') \\
&= H_{\bar{f}}(g_\theta)(ze^{i\theta}),
\end{aligned}$$

où $g_\theta$ est la fonction définie par

$$g_\theta(z) = e^{(q-1)i\theta} g(ze^{-i\theta}) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Remarquons de plus que $\{g_\theta, g \in \mathcal{D}_m\} = \mathcal{D}_m$ et $\|g_\theta\|_{\mathcal{H}_m} = \|g\|_{\mathcal{H}_m}$ pour tout $g$ dans $\mathcal{D}_m$.

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition 2.3.2 donne :

$$s_n\left(H_{\overline{f_\theta^q}}\right) = \inf_{\substack{\mathcal{L}(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})),\\ \text{rang(A)} \leq \text{n}}} \|H_{\overline{f_\theta^q}} - A\|.$$

La densité de $\mathcal{D}_m$ dans $\mathcal{H}_m$ et (4.3.7) impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ tel que rang $(A) \leq n$ :

$$\begin{aligned}
\|H_{\overline{f_\theta^q}} - A\| &= \sup_{g\in\mathcal{H}_m,\, \|g\|_{\mathcal{H}_m}=1} \|(H_{\overline{f_\theta^q}} - A)g\|_{L^2(\mathbb{D})} = \sup_{g\in\mathcal{D}_m,\, \|g\|_{\mathcal{H}_m}=1} \|(H_{\overline{f_\theta^q}} - A)g\|_{L^2(\mathbb{D})} \\
&= \sup_{g_\theta\in\mathcal{D}_m,\, \|g_\theta\|_{\mathcal{H}_m}=1} \|(H_{\overline{f_\theta^q}} - A)g_\theta\|_{L^2(\mathbb{D})} = \sup_{g\in\mathcal{D}_m,\, \|g\|_{\mathcal{H}_m}=1} \|(H_{\bar{f}} - A)g\|_{L^2(\mathbb{D})} \\
&= \sup_{g\in\mathcal{H}_m,\, \|g\|_{\mathcal{H}_m}=1} \|(H_{\bar{f}} - A)g\|_{L^2(\mathbb{D})} = \|H_{\bar{f}} - A\|.
\end{aligned}$$

Il découle de cette dernière égalité que :

$$s_n\left(H_{\overline{f_\theta^q}}\right) = s_n(H_{\bar{f}}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.8}$$

Finalement, l'égalité (4.3.8) donne que $f_\theta^q \in X_p$ et $\|f_\theta^q\|_{X_p} = \|f\|_{X_p}$, et le lemme est ainsi prouvé.

□

**Lemme 4.3.3.** *Soient* $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$, $q \in \mathbb{N}$ *et* $f \in X_p$. *L'application* $T_f^q$ *de* $[0,2\pi]$ *dans* $X_p$, *définie par* $T_f^q(\theta) = f_\theta^q$ *pour tout* $\theta \in [0,2\pi]$, *est continue.*

*Preuve.* Soient une fonction $f$ dans $X_p$ et $q \in \mathbb{N}$. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ vérifiant $|\theta - \theta'| \leq \delta$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_\theta^q - f_{\theta'}^q\|_{X_p} &= \|H_{\overline{f_\theta^q}} - H_{\overline{f_{\theta'}^q}}\|_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[s_n\left(H_{\overline{f_\theta^q}} - H_{\overline{f_{\theta'}^q}}\right)\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous savons par (4.3.8) que pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n\left(H_{\overline{f_q^\theta}}\right) = s_n(H_{\bar{f}})$. De plus, la proposition 2.3.3 donne :

$$s_{m_1+m_2}(T_1 + T_2) \leq s_{m_1}(T_1) + s_{m_2}(T_2)$$

pour tous opérateurs compacts $T_1$ et $T_2$ et pour tous $m_1$, $m_2$ dans $\mathbb{N}$. Par conséquent, nous obtenons pour $n \in \mathbb{N}$ que, si $k$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$, alors :

$$s_n\left(H_{\overline{f_\theta^q}} - H_{\overline{f_{\theta'}^q}}\right) \leq s_k\left(H_{\overline{f_\theta^q}}\right) + s_k\left(H_{\overline{f_{\theta'}^q}}\right) \leq 2s_k(H_{\bar{f}}) \quad \text{pour tous } \theta,\theta' \text{ dans } [0,2\pi].$$

La dernière inégalité combinée avec le fait que $H_{\bar{f}}$ appartient à $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$ implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n\geq n_0+1} \left[s_n\left(H_{\overline{f_\theta^q}} - H_{\overline{f_{\theta'}^q}}\right)\right]^p \leq \frac{\epsilon^p}{2} \quad \text{pour tous } \theta,\theta' \text{ dans } [0,2\pi]. \tag{4.3.9}$$

Maintenant, il reste à montrer que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ tels que $|\theta-\theta'|$ est suffisamment petit, on a

$$\sum_{n\leq n_0}\left[s_n\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)\right]^p\leq\frac{\epsilon^p}{2}. \tag{4.3.10}$$

Pour ce faire, rappelons tout d'abord qu'en vertu de la proposition 2.3.2, on a pour $n\in\mathbb{N}$ :

$$s_n\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)=\inf_{\substack{\mathcal{L}(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D})),\\ \text{rang(A)}\leq\text{n}}}\left\|H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}-A\right\|. \tag{4.3.11}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $P_n$ la projection de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{N}_n$, où $\mathcal{N}_n$ désigne le sous-espace de $\mathcal{H}_m$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Il est évident que

$$\text{rang}\left([H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}]\circ P_n\right)\leq n\quad\text{pour tous }\theta,\theta'\text{ dans }[0,2\pi].$$

Soit $f=\sum_{k=0}^\infty a_kz^k$ le développement en série entière de $f$. Pour $r\in\mathbb{N}$ et deux réels $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$, on définit la fonction $Q^q_r(\theta,\theta')$ par :

$$Q^q_r(\theta,\theta')(z)=\sum_{k=0}^r a_k(e^{i(k-q)\theta}-e^{i(k-q)\theta'})z^k\quad\text{pour tout }z\in\mathbb{D}.$$

Il découle de (4.3.11) les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
s_n\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)&\leq\left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)-\left[H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right]\circ P_n\right\|\\
&\leq\left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)-H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}\right\|\\
&\quad+\left\|H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}-H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}\circ P_n\right\|\\
&\quad+\left\|H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}\circ P_n-\left[H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right]\circ P_n\right\|\\
&\leq 2\left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)-H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}\right\|\\
&\quad+\left\|H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}-H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}\circ P_n\right\|
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

pour tout $r\in\mathbb{N}$ et tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$.

Pour prouver l'assertion (4.3.10), on doit tout d'abord montrer qu'il existe $r_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ on a :

$$\left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}}-H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right)-H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}}\right\|\leq\frac{\epsilon}{3[2(n_0+1)]^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.3.13}$$

L'inégalité $p \leq \frac{2}{4-m}$ implique $p \leq 2$ et par conséquent, $H_{\bar{f}}$ appartient également à $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$. De plus, le lemme 4.2.4 établit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ est dans $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$. En vertu de (4.3.8), il s'ensuit que l'opérateur de Hankel $\left(H_{\overline{f^q_\theta}} - H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right) - H_{\overline{Q^q_r(\theta,\theta')}}$ appartient également à $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$, pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ et tout $r \in \mathbb{N}$.

La norme de $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$ dérive du produit scalaire défini par :

$$\langle A,B\rangle_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} = \sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!} \langle A(z^d),B(z^d)\rangle_{L^2(\mathbb{D})}$$

pour tous $A,B$ in $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$ (voir [2]).
À partir du lemme 4.2.1 et de (4.2.1), un calcul direct montre que pour tout entier $k$, les fonctions $\{H_{\overline{z}^k}(z^d)\}_{d\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales dans $L^2(\mathbb{D})$. De même, pour tout $d \in \mathbb{N}$, les fonctions $\{H_{\overline{z}^k}(z^d)\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales dans $L^2(\mathbb{D})$. Ceci entraîne que les opérateurs de Hankel $\{H_{\overline{z}^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont orthogonaux dans $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$. Ainsi, on obtient :

$$\|H_{\bar{f}}\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 \, \|H_{\overline{z}^k}\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} < +\infty.$$

Par suite, on peut trouver $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}
\left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}} - H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right) - H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}}\right\|^2 &\leq \left\|\left(H_{\overline{f^q_\theta}} - H_{\overline{f^q_{\theta'}}}\right) - H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}}\right\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} \\
&= \left\| \sum_{k\geq r_0+1} a_k \left(e^{i(k-q)\,\theta} - e^{i(k-q)\,\theta'}\right) H_{\overline{z}^k} \right\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} \\
&= \sum_{k\geq r_0+1} |a_k \left(e^{i(k-q)\,\theta} - e^{i(k-q)}\right)|^2 \, \|H_{\overline{z}^k}\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} \\
&\leq 4 \sum_{k\geq r_0+1} |a_k|^2 \, \|H_{\overline{z}^k}\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))} \\
&\leq \left[\frac{\epsilon}{3[2(n_0+1)]^{\frac{1}{p}}}\right]^2
\end{aligned}$$

pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$, de telle sorte que (4.3.13) a lieu.

Nous devons ensuite prouver qu'il existe $\delta(n) > 0$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ vérifiant $|\theta-\theta'| \leq \delta(n)$, on a

$$\left\|H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} - H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} \circ P_n\right\| \leq \frac{\epsilon}{3[2(n_0+1)]^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.3.14}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left\|H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} - H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} \circ P_n\right\| &\leq 2 \left\|H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}}\right\| \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^{r_0} |a_k| \, |e^{i(k-q)\,\theta} - e^{i(k-q)\,\theta'}| \, \|H_{\overline{z}^k}\|.
\end{aligned}$$

Définissons, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k$ par $f_k(\theta) = e^{i(k-q)\theta}$ pour tout $\theta \in [0{,}2\pi]$. Les fonctions $f_k$ étant uniformément continues sur $[0{,}2\pi]$ pour tout $0 \leq k \leq r_0$, on en déduit qu'il existe $\delta(n) > 0$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0{,}2\pi]$ vérifiant $|\theta-\theta'| \leq \delta(n)$, on a :

$$\left\| H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} - H_{\overline{Q^q_{r_0}(\theta,\theta')}} \circ P_n \right\| \leq 2 \sum_{k=0}^{r_0} |a_k| \; |e^{i(k-q)\theta} - e^{i(k-q)\theta'}| \; \|H_{\overline{z}^k}\| \leq \frac{\epsilon}{3[2(n_0+1)]^{\frac{1}{p}}},$$

ce qui entraîne (4.3.14).

Ainsi, en combinant (4.3.12), (4.3.13) et (4.3.14), on obtient que (4.3.10) a lieu pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0{,}2\pi]$ vérifiant $|\theta - \theta'| \leq \delta$, avec $\delta = \min_{n \leq n_0} \delta(n)$.

Finalement, en vertu des assertions (4.3.9) et (4.3.10), il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0{,}2\pi]$ vérifiant $|\theta - \theta'| \leq \delta$, on a $\|f^q_\theta - f^q_{\theta'}\|_{X_p} < \epsilon$.
Ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

Soit $0 < p \leq \frac{2}{4-m}$. Pour compléter la preuve du théorème, nous devons montrer que si $X_p$ contient une fonction non constante, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme $z^k$ est dans $X_p$.

Supposons qu'il existe une fonction $f$ non constante dans $X_p$. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $f(0) = 0$. Soit $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ le développement en série entière de $f$. Puisque $f$ est une fonction non constante, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{k_0} \neq 0$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} a_{k_0} z^{k_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) e^{-ik_0\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{k_0}_\theta(z) d\theta. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $F_n$ appartient à $X_p$ comme combinaison linéaire de fonctions dans $X_p$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{k_0}_\theta(z) \, d\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}}(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z),$$

au sens des sommes de Riemann.

Or, les lemmes 4.3.2 et 4.3.3 et le fait que $\|.\|^p_{X_p}$ vérifie l'inégalité triangulaire sur le sous-espace de $X_p$ constitué des fonctions s'annulant en 0, donnent que la suite

$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $X_p$. En effet, soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 4.3.3, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $\theta,\theta'$ dans $[0,2\pi]$ vérifiant $|\theta-\theta'| \leq \delta$, on a $\|f^q_\theta - f^q_{\theta'}\|^p_{X_p} < \epsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N} \leq \delta$. Pour tous entiers $m$ et $n$ tels que $m > n \geq N$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\|F_m - F_n\|^p_{X_p} &= \left\| \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^m}} - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}} \right\|^p_{X_p} \\
&= \left\| \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} \left( f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}+\frac{2\pi j}{2^m}} - f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}} \right) \right\|^p_{X_p} \\
&\leq \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} \left\| f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}+\frac{2\pi j}{2^m}} - f^{k_0}_{\frac{2\pi k}{2^n}} \right\|^p_{X_p} \\
&\leq \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} \epsilon \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc la suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy dans $X_p$. Puisque, d'après le lemme 4.3.1, l'espace $X_p$ est un espace quasi-Banach, il existe une fonction $g \in X_p$, avec $g(0) = 0$, telle que la suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$ dans $X_p$. En reprenant le même raisonnement que celui de la preuve du lemme 4.3.1, on montre que la suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$ dans $L^2(\mathbb{D})$, donc presque partout. Ainsi, d'après (4.3.15) et le fait que $g$ est continue, on obtient que $a_{k_0} z^{k_0} = g$ et par suite, $a_{k_0} z^{k_0} \in X_p$.

Comme $a_{k_0} \neq 0$, on en déduit que $z^{k_0} \in X_p$. Mais ceci est impossible d'après le lemme 4.2.4. Donc $X_p$ ne contient pas de fonction non constante. Ce résultat complète la preuve du théorème. □

## 4.4 Preuve des propositions 4.1.1 et 4.1.2

Pour prouver les propositions 4.1.1 et 4.1.2, nous allons utiliser l'action de $H_{\bar{f}}$ sur le noyau reproduisant normalisé de $\mathcal{H}_m$.

Soit $0 \leq m \leq 1$. Commençons par montrer que l'espace $\mathcal{H}_m$ admet un noyau reproduisant. Pour toute fonction $g = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k \in \mathcal{H}_m$, on a :

$$\|g\|^2_{\mathcal{H}_m} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|^2 k!}{\Gamma(k+m)} \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|^2}{k+1} = \|g\|^2_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}.$$

Ainsi, puisque l'évaluation en un point est une application linéaire bornée sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, on en déduit que l'évaluation en un point est également une fonctionnelle bornée sur $\mathcal{H}_m$. Par conséquent, l'espace $\mathcal{H}_m$ admet un noyau reproduisant que l'on note $k^m$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on désigne par $k^m_z$ la fonction dans $\mathcal{H}_m$ définie par:

$$k^m_z(w) = \overline{k^m(z,w)} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}.$$

De plus, en utilisant la représentation en série vue dans le lemme 3.2.2, on obtient :

$$k_z^m(w) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\|\zeta\|^2_{\mathcal{H}_m}} \overline{z}^k w^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+m)}{k!} \overline{z}^k w^k$$

pour tous $z$,$w$ dans $\mathbb{D}$.

Or on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\ \Gamma(\lambda)} z^k \overline{w}^k = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z\overline{w})^\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ \ln\left(\dfrac{1}{1-z\overline{w}}\right) & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \tag{4.4.16}$$

Par suite, il vient :

$$k_z^m(w) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m)}{(1-\overline{z}w)^m} & \text{si } m > 0 \\ \ln\left(\dfrac{1}{1-\overline{z}w}\right) & \text{si } m = 0 \end{cases} \tag{4.4.17}$$

pour tous $z$,$w$ dans $\mathbb{D}$.

Désormais, on suppose que $0 < m \leq 1$. D'après l'assertion (4.4.17), on a :

$$\|k_z^m\|^2_{\mathcal{H}_m} = \langle k_z^m, k_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m} = k_z^m(z) = \frac{\Gamma(m)}{(1-|z|^2)^m}.$$

On définit la fonction $\widetilde{k_z^m} \in \mathcal{H}_m$ par :

$$\widetilde{k_z^m}(w) = \frac{k_z^m(w)}{\|k_z^m\|_{\mathcal{H}_m}} = \frac{(1-|z|^2)^{\frac{m}{2}}}{(1-\overline{z}w)^m} \tag{4.4.18}$$

pour tout $w \in \mathbb{D}$.

Soit $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Si l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est borné, alors il se prolonge par continuité en un opérateur, noté encore $H_{\bar{f}}$, borné sur $\mathcal{H}_m$. En outre, puisque pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{k_z^m}$ est un vecteur unitaire de $\mathcal{H}_m$, on a :

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} < +\infty. \tag{4.4.19}$$

De plus, tout élément de $\mathcal{D}_m$ étant un polynôme, donc borné sur $\mathbb{D}$, on obtient :

$$\langle g, \widetilde{k_z^m}\rangle_{\mathcal{H}_m} = g(z)(1-|z|^2)^{\frac{m}{2}} \xrightarrow[|z|\to 1^-]{} 0$$

pour tout $g \in \mathcal{D}_m$. Comme $\mathcal{D}_m$ est dense dans $\mathcal{H}_m$, on en déduit que la suite $\{\widetilde{k_z^m}\}_{z\in\mathbb{D}}$ tend faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}_m$ quand $|z| \to 1^-$.

Ainsi, si $H_{\bar{f}}$ est compact,

$$\lim_{|z|\to 1^-} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} = 0. \tag{4.4.20}$$

Par conséquent, d'après les assertions (4.4.19) et (4.4.20), il nous suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}}\,|f'(z)| \le C\,\|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}. \tag{4.4.21}$$

Pour prouver l'assertion (4.4.21), nous allons utiliser la formule suivante :

$$f'(z) = 2\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w} f(w)}{(1-z\overline{w})^3}\, d\nu(w) \quad \text{pour toute fonction } f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}). \tag{4.4.22}$$

Cette identité est obtenue en dérivant la formule de reproduction (4.3.6).

Introduisons, pour $z \in \mathbb{D}$, la fonction $j_z$ définie par :

$$j_z(w) = \frac{\overline{w}}{(1-z\overline{w})^{3-m}} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, la fonction $j_z$ est orthogonale dans $L^2(\mathbb{D})$ aux fonctions holomorphes puisque $j_z$ est une fonction antiholomorphe qui s'annule en 0. De plus, d'après (4.4.16) et (4.2.1), on a :

$$\begin{aligned}\|j_z\|^2_{L^2(\mathbb{D})} &= \frac{1}{[\Gamma(3-m)]^2}\left\|\overline{w}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+3-m)}{k!}\, z^k\overline{w}^k\right\|^2_{L^2(\mathbb{D})}\\ &= \frac{1}{[\Gamma(3-m)]^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\Gamma(k+3-m)}{k!}\right)^2 \frac{1}{k+2}\,|z|^{2k}.\end{aligned}$$

Or la formule de Stirling donne :

$$\left(\frac{\Gamma(k+3-m)}{k!}\right)^2 \frac{1}{k+2} \simeq k^{4-2m-1}.$$

En outre, on a l'estimation suivante :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{\lambda-1}|z|^{2k} \simeq \frac{1}{(1-|z|^2)^\lambda} \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \tag{4.4.23}$$

où la notation $|g(z)| \simeq |h(z)|$ signifie qu'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que $C_1|g(z)| \le |h(z)| \le C_1|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Pour la démonstration de (4.4.23), se référer à [49].

Il en découle que

$$\|j_z\|_{L^2(\mathbb{D})} \simeq \frac{1}{(1-|z|^2)^{2-m}}. \tag{4.4.24}$$

On définit ensuite pour $z \in \mathbb{D}$ la fonction $\widetilde{j_z}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{j_z}(w) = \frac{j_z(w)}{\|j_z\|_{L^2(\mathbb{D})}} \text{ pour tout } w \in \mathbb{D},$$

de sorte que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{j_z}$ est un vecteur unitaire de $L^2(\mathbb{D})$.

Ainsi, en vertu de (4.4.18), (4.4.22) et (4.4.24) et en utilisant le fait que $\widetilde{j_z}$ est orthogonal dans $L^2(\mathbb{D})$ aux fonctions holomorphes, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle \widetilde{j_z}, H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\rangle_{L^2(\mathbb{D})}| &= |\langle \widetilde{j_z}, (I-P)(\bar{f}k_z^m)\rangle_{L^2(\mathbb{D})}| \\
&= |\langle \widetilde{j_z}, \bar{f}k_z^m\rangle_{L^2(\mathbb{D})}| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}}{(1-z\overline{w})^{3-m}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^m}\, d\nu(w) \right| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w} f(w)}{(1-z\overline{w})^3}\, d\nu(w) \right| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)|.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle \widetilde{j_z}, H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\rangle_{L^2(\mathbb{D})}| \leq \|\widetilde{j_z}\|_{L^2(\mathbb{D})} \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})} = \|H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m})\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

En combinant les deux derniers résultats, on obtient (4.4.21) et ainsi les propositions 4.1.1 et 4.1.2 sont prouvées. □

Dans le cas $m = 0$, nous avons essayé d'appliquer cette méthode. L'expression de la fonction $j_z$ contenait alors un logarithme pour compenser celui provenant du noyau de l'espace de Dirichlet. La présence de ce logarithme complique les calculs et nous n'avons pas pu estimer correctement $\|j_z\|^2_{L^2(\mathbb{D})}$, d'où l'absence de résultat dans le cas $m = 0$.

## 4.5 Preuve du théorème 4.1.2

Soit $0 \leq m \leq 1$ et soit une fonction $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telle que l'opérateur de Hankel $H_{\bar{f}}$ de $\mathcal{H}_m$ dans $L^2(\mathbb{D})$ soit compact. Pour montrer le théorème 4.1.2, nous allons utiliser que, d'après le corollaire 2.3.1, l'opérateur $H_{\bar{f}}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si l'opérateur $H^*_{\bar{f}}H_{\bar{f}}$ est un opérateur à trace. Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $u_d = \sqrt{\frac{\Gamma(d+m)}{d!}} z^d$. La famille $\{u_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_m$. Par conséquent, en vertu du corollaire 2.3.1, on obtient que

$$H_{\bar f} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})) \iff \sum_{d\in\mathbb{N}} \langle H_{\bar f}^* H_{\bar f}(u_d), u_d\rangle_{\mathcal{H}_m} < +\infty. \qquad (4.5.25)$$

Soit $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$ le développement en série entière de $f$. Pour $d \in \mathbb{N}$, il découle du lemme 4.2.1 les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H_{\bar f}(z^d)(\zeta) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{b_k}\, H_{\overline{z}^k}(z^d)(\zeta) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{b_k}\, \overline{\zeta}^k \zeta^d - \sum_{k\le d} \overline{b_k}\, \frac{d+1-k}{d+1} \zeta^{d-k} = \overline{f(\zeta)}\zeta^d - \sum_{k\le d} \overline{b_k}\, \frac{d+1-k}{d+1} \zeta^{d-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $d \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle H_{\bar f}^* H_{\bar f}(z^d)(\zeta), \zeta^d\rangle_{\mathcal{H}_m} &= \langle H_{\bar f}(z^d)(\zeta), H_{\bar f}(z^d)(\zeta)\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \left\| \overline{f(\zeta)}\zeta^d - \sum_{k\le d} \overline{b_k}\, \frac{d+1-k}{d+1}\zeta^{d-k} \right\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \| f(\zeta)\zeta^d \|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad - \sum_{k\le d} \overline{b_k}\, \frac{d+1-k}{d+1} \langle \zeta^{d-k}, \overline{f(\zeta)}\zeta^d\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad - \sum_{k\le d} b_k\, \frac{d+1-k}{d+1} \langle \overline{f(\zeta)}\zeta^d, \zeta^{d-k}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad + \sum_{k\le d, p\le d} \overline{b_k} b_p\, \frac{(d+1-k)(d+1-p)}{(d+1)^2} \langle \zeta^{d-k}, \zeta^{d-p}\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &= \| \sum_{p\in\mathbb{N}} b_p\, \zeta^{p+d} \|^2_{L^2(\mathbb{D})} - \sum_{k\le d} b_k \frac{d+1-k}{d+1} \left\langle \sum_{p\in\mathbb{N}} b_p\, \zeta^{p+d-k}, \zeta^d \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad - \sum_{k\le d} b_k\, \frac{d+1-k}{d+1} \left\langle \zeta^d, \sum_{p\in\mathbb{N}} b_p\, \zeta^{p+d-k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})} \\ &\quad + \sum_{k\le d, p\le d} \overline{b_k} b_p\, \frac{(d+1-k)(d+1-p)}{(d+1)^2} \langle \zeta^{d-k}, \zeta^{d-p}\rangle_{L^2(\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

Par suite, en vertu de (4.2.1), il vient :

$$\begin{aligned}\langle H_{\bar f}^* H_{\bar f}(z^d)(\zeta),\zeta^d\rangle_{\mathcal{H}_m} &= \sum_{p\in\mathbb{N}} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1} - \sum_{p\le d} |b_p|^2 \frac{d+1-p}{(d+1)^2} \\ &= \sum_{p=0}^{d} |b_p|^2 \left[\frac{1}{p+d+1} - \frac{d+1-p}{(d+1)^2}\right] + \sum_{p=d+1}^{+\infty} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1} \\ &= \sum_{p\le d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}\frac{p^2}{(d+1)^2} + \sum_{p>d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}.\end{aligned}$$

Pour $d \in \mathbb{N}$, il en découle l'égalité suivante :

$$\langle H_{\bar f}^* H_{\bar f}(u_d),u_d\rangle_{\mathcal{H}_m} = \frac{\Gamma(d+m)}{d!}\left[\sum_{p\le d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}\frac{p^2}{(d+1)^2} + \sum_{p>d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}\right]. \tag{4.5.26}$$

D'autre part, d'après (4.4.16) et le théorème de Fubini, on a si $m = 0$ :

$$\begin{aligned}\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 \ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)|f'(z)|^2 d\nu(z) &= \int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2\left[\sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!\Gamma(m)}|z^d f'(z)|^2\right] d\nu(z) \\ &\simeq \sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!}\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 |z^d f'(z)|^2 d\nu(z)\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

et si $0 < m \le 1$ :

$$\begin{aligned}\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2-m}|f'(z)|^2 d\nu(z) &= \int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2\left[\sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!\Gamma(m)}|z^d f'(z)|^2\right] d\nu(z) \\ &\simeq \sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(d+m)}{d!}\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 |z^d f'(z)|^2 d\nu(z).\end{aligned} \tag{4.5.28}$$

Par conséquent, en combinant (4.5.25), (4.5.26), (4.5.27) et (4.5.28), on voit que pour démontrer le théorème 4.1.2, il nous suffit de montrer que

$$\int_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 |z^d f'(z)|^2 d\nu(z) \simeq \left[\sum_{p\le d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}\frac{p^2}{(d+1)^2} + \sum_{p>d} |b_p|^2 \frac{1}{p+d+1}\right]. \tag{4.5.29}$$

Or, en utilisant (4.2.1), on obtient pour $d \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
&\int_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|z^d f'(z)|^2 d\nu(z)\\
&=\int_{z\in\mathbb{D}}|z^d f'(z)|^2 d\nu(z)-2\int_{z\in\mathbb{D}}|z^{d+1} f'(z)|^2 d\nu(z)+\int_{z\in\mathbb{D}}|z^{d+2} f'(z)|^2 d\nu(z)\\
&=\sum_{p=1}^{\infty}|b_p|^2p^2\left[\frac{1}{d+p}-\frac{2}{d+p+1}+\frac{1}{d+p+2}\right]\\
&=\sum_{1\le p\le d}|b_p|^2\frac{2p^2}{(d+p)(d+p+2)}\frac{1}{(d+p+1)}+\sum_{p>d}|b_p|^2\frac{2p^2}{(d+p)(d+p+2)}\frac{1}{(d+p+1)}.
\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir que

pour $1\le p\le d$

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{(d+1)^2}\frac{1}{(d+p+1)}\le\frac{2p^2}{(d+p)(d+p+2)}\frac{1}{(d+p+1)}\le 2\frac{p^2}{(d+1)^2}\frac{1}{(d+p+1)}$$

et pour $p>d$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(d+p+1)}\le\frac{2p^2}{(d+p)(d+p+2)}\frac{1}{(d+p+1)}\le\frac{2}{(d+p+1)}.$$

Ces dernières inégalités donnent (4.5.29), ce qui achève la preuve du théorème 4.1.2. □

## 4.6 Preuve de la proposition 4.1.3 dans le cas où $p\ge 2$

Afin de démontrer la proposition 4.1.3 dans le cas $p\ge 2$, nous allons adopter l'approche de M. Smith dans [44]. L'intérêt de cette preuve est qu'elle met en évidence l'importance de l'action de $H_{\bar f}$ sur les noyaux reproduisant et dérivé de $\mathcal{H}_m$.

Soit $0<m\le 1$. On a pour tout $g\in\mathcal{H}_m$ :

$$\|g\|^2_{\mathcal{H}_m}=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}|g'(z)|^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}|g(z)|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z).\tag{4.6.30}$$

En effet, soit $g\in\mathcal{H}_m$. Si $g=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kz^k$ est le développement en série entière de $g$, alors en utilisant (3.4.17), on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}|g'(z)|^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}|g(z)|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\
&=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\right|^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kz^k\right|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2|a_k|^2}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}|z^{k-1}|^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_k|^2\int_{\mathbb{D}}|z^k|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2\frac{(k-1)!}{\Gamma(k+m+1)}+\frac{m}{\Gamma(m)}\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_k|^2\frac{\Gamma(m)k!}{\Gamma(k+m+1)}\\
&=\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_k|^2\frac{(k+m)k!}{\Gamma(k+m+1)}\\
&=\|g\|^2_{\mathcal{H}_m}.
\end{aligned}$$

De plus, si $z\in\mathbb{D}$, alors les assertions (4.4.22) et (4.6.30) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent :

$$\begin{aligned}
|g'(z)| &= 2\left|\int_{\mathbb{D}}\frac{\overline{w}g(w)}{(1-z\overline{w})^3}d\nu(z)\right|\\
&\leq 2\left|\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\frac{m-1}{2}}(1-|w|^2)^{\frac{1-m}{2}}g(w)}{(1-z\overline{w})^3}d\nu(z)\right|\\
&\leq 2\left(\int_{\mathbb{D}}|g(w)|^2(1-|w|^2)^{m-1}d\nu(w)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{1-m}}{|1-z\overline{w}|^6}d\nu(w)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\,\|g\|_{\mathcal{H}_m},
\end{aligned}$$

où $C$ est une constante strictement positive ne dépendant que de $z$ et de $m$.
Par conséquent, pour tout $z\in\mathbb{D}$, l'application $g\mapsto g'(z)$ est une application linéaire continue sur l'espace $\mathcal{H}_m$. On en déduit par le théorème de représentation de Riesz qu'il existe une unique fonction notée $\dot{k}_z^m\in\mathcal{H}_m$ telle que

$$g'(z)=\langle g,\dot{k}_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m}\quad\text{pour tout } g\in\mathcal{H}_m.$$

On appellera $\dot{k}_z^m$ le noyau dérivé de $\mathcal{H}_m$.

En outre, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_m$, on a nécessairement

$$\dot{k}_z^m=\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle\dot{k}_z^m,e_n\rangle_{\mathcal{H}_m}e_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{e_n'(z)}e_n,$$

ce qui, en vertu de (3.2.2) et (4.4.17), nous conduit à l'égalité suivante :

$$\dot{k}_z^m(w) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(k_z^m(w)) = \frac{m\Gamma(m)w}{(1-\overline{z}w)^{m+1}} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}.$$

De plus, en combinant (4.4.16) et (4.4.23), on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|\dot{k}_z^m\|_{\mathcal{H}_m}^2 &= \left\| m\Gamma(m)w \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+m+1)}{k!\,\Gamma(m+1)} \overline{z}^k w^k \right\|_{\mathcal{H}_m}^2 \\
&= \frac{m^2\Gamma(m)}{[\Gamma(m+1)]^2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{[\Gamma(k+m+1)]^2}{(k!)^2} \frac{k!\,(k+m)}{\Gamma(k+m)} |z|^{2k} \\
&\simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+m+1)(k+m)}{k!} |z|^{2k} \qquad (4.6.31)\\
&\simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+m+2)}{k!} |z|^{2k} \\
&\simeq \frac{1}{(1-|z|^2)^{m+2}}.
\end{aligned}$$

On définit ensuite la fonction $\widetilde{\dot{k}_z^m} \in \mathcal{H}_m$ par :

$$\widetilde{\dot{k}_z^m}(w) = \frac{\dot{k}_z(w)}{\|\dot{k}_z\|_{\mathcal{H}_m}} \quad \text{pout tout } w \in \mathbb{D}.$$

Pour démontrer la proposition 4.1.3 dans le cas $p \geq 2$, nous avons besoin de résultats intermédiaires concernant les opérateurs compacts sur $\mathcal{H}_m$.

**Lemme 4.6.1.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $T$ un opérateur de $\mathcal{H}_m$ dans $H$. Si $T$ est compact, alors :*

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,H)}^2 =& \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_{\mathbb{D}} \|T(\dot{k}_z^m)\|_H^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z) \\
&+ \frac{m}{\Gamma(m)} \int_{\mathbb{D}} \|T(k_z^m)\|_H^2 (1-|z|^2)^{m-1} d\nu(z).
\end{aligned}$$

*Preuve.* Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de $H$. En utilisant le fait que $\dot{k}_z^m$ est le noyau dérivé de $\mathcal{H}_m$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \|T\dot{k}_z^m\|_H^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle T\dot{k}_z^m, e_n\rangle_H|^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{D}} |\langle \dot{k}_z^m, T^* e_n\rangle_{\mathcal{H}_m}|^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{D}} |(T^* e_n(z))'|^2 (1-|z|^2)^m d\nu(z).
\end{aligned}$$

De même, en utilisant le fait que $k_z^m$ est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_m$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \|Tk_z^m\|_H^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Tk_z^m,e_n\rangle_H|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{D}} |\langle k_z^m,T^*e_n\rangle_{\mathcal{H}_m}|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{D}} |T^*e_n(z)|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z).\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant les deux égalités précédemment obtenues et en utilisant (4.6.30) et le corollaire 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}} \|T(\dot{k}_z^m)\|_H^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}} \|T(k_z^m)\|_H^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\ &=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}|(T^*e_n)'(z)|^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}|(T^*e_n)(z)|^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\ &=\sum_{n\in\mathbb{N}}\|T^*e_n\|_{\mathcal{H}_m}^2 = \|T^*\|_{\mathcal{S}_2(H,\mathcal{H}_m)}^2 = \|T\|_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,H)}^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, le lemme est prouvé. □

**Lemme 4.6.2.** *Si $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)$ est un opérateur positif, alors :*

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{S}_1(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)} &= \|T^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)}^2\\ &\simeq \int_{\mathbb{D}}\langle T\widetilde{\dot{k}_z^m},\widetilde{\dot{k}_z^m}\rangle_{\mathcal{H}_m}\frac{1}{(1-|z|^2)^2}d\nu(z)+\int_{\mathbb{D}}\langle T\widetilde{k_z^m},\widetilde{k_z^m}\rangle_{\mathcal{H}_m}\frac{1}{(1-|z|^2)}d\nu(z).\end{aligned}$$

*Preuve.* En vertu du théorème 2.3.3, on a directement :

$$\|T^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)}^2 = \|T\|_{\mathcal{S}_1(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)}.$$

Or, le lemme 4.6.1 donne :

$$\begin{aligned}\|T^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)}^2 =&\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}\|T^{\frac{1}{2}}(\dot{k}_z^m)\|_{\mathcal{H}_m}^2(1-|z|^2)^m d\nu(z)\\ &+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}\|T^{\frac{1}{2}}(k_z^m)\|_{\mathcal{H}_m}^2(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\ =&\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}\langle T^{\frac{1}{2}}(\dot{k}_z^m),T^{\frac{1}{2}}(\dot{k}_z^m)\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^m d\nu(z)\\ &+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}\langle T^{\frac{1}{2}}(k_z^m),T^{\frac{1}{2}}(k_z^m)\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z).\end{aligned}$$

Le fait que $T^{\frac{1}{2}}$ soit positif, donc auto-adjoint, la proposition 2.1.3, et les estimations (4.4.18) et (4.6.31), entraînent que

$$\begin{aligned}
\|T^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_m)} =& \frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}\langle T^{\frac{1}{2}*}T^{\frac{1}{2}}(\dot{k}_z^m),\dot{k}_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^m d\nu(z)\\
&+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}\langle T^{\frac{1}{2}*}T^{\frac{1}{2}}(k_z^m),k_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\
=&\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_{\mathbb{D}}\langle T\dot{k}_z^m,\dot{k}_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^m d\nu(z)\\
&+\frac{m}{\Gamma(m)}\int_{\mathbb{D}}\langle Tk_z^m,k_z^m\rangle_{\mathcal{H}_m}(1-|z|^2)^{m-1}d\nu(z)\\
\simeq&\int_{\mathbb{D}}\langle T\widetilde{\dot{k}_z^m},\widetilde{\dot{k}_z^m}\rangle_{\mathcal{H}_m}\frac{1}{(1-|z|^2)^2}d\nu(z)+\int_{\mathbb{D}}\langle T\widetilde{k_z^m},\widetilde{k_z^m}\rangle_{\mathcal{H}_m}\frac{1}{(1-|z|^2)}d\nu(z).
\end{aligned}$$

La dernière estimation donne le lemme. □

**Lemme 4.6.3.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $2 \leq p < +\infty$. Soit $T$ un opérateur compact de $\mathcal{H}_m$ dans $H$. Si $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\int_{\mathbb{D}}\left\|T\widetilde{\dot{k}_z^m}\right\|_H^p\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\,d\nu(z)+\int_{\mathbb{D}}\left\|T\widetilde{k_z^m}\right\|_H^p\frac{1}{(1-|z|^2)}\,d\nu(z)\leq C\,\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)}.$$

*Preuve.* Soient $2 \leq p < +\infty$ et $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)$. Soit $E$ la mesure spectrale de l'opérateur $T^*T$, définie dans le théorème 2.1.2. D'après le corallaire 2.1.1 et l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned}
\|Tg\|_H^p = \langle T^*Tg,g\rangle_{\mathcal{H}_m}^{\frac{p}{2}} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t\, d\langle E_t\, g,g\rangle_{\mathcal{H}_m}\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\frac{p}{2}}\, d\langle E_t\, g,g\rangle_{\mathcal{H}_m}\\
&\leq \langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}g,g\rangle_{\mathcal{H}_m}
\end{aligned}$$

pour tout $g \in \mathcal{H}_m$.

Par conséquent, on obtient les inégalités suivantes :

$$\left\|T\widetilde{\dot{k}_z^m}\right\|_H^p \leq \left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}\widetilde{\dot{k}_z^m},\widetilde{\dot{k}_z^m}\right\rangle_{\mathcal{H}_m} \quad \text{et} \quad \left\|T\widetilde{k_z^m}\right\|_H^p \leq \left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}\widetilde{k_z^m},\widetilde{k_z^m}\right\rangle_{\mathcal{H}_m}.$$

Ces dernières inégalités, combinées avec le lemme 4.6.2 et le corollaire 2.3.1 impliquent que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left\| T\widetilde{k_z^m} \right\|_H^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) + \int_{\mathbb{D}} \left\| T\widetilde{k_z^m} \right\|_H^p \frac{1}{(1-|z|^2)}\, d\nu(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}} \widetilde{k_z^m}, \widetilde{k_z^m} \right\rangle_{\mathcal{H}_m} \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) + \int_{\mathbb{D}} \left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}} \widetilde{k_z^m}, \widetilde{k_z^m} \right\rangle_{\mathcal{H}_m} \frac{1}{(1-|z|^2)}\, d\nu(z) \\
&\leq C \,\|(T^*T)^{\frac{p}{2}}\|_{\mathcal{S}_1(\mathcal{H}_m,H)} = \|T\|^p_{\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,H)}\,,
\end{aligned}$$

où $C$ est une constante strictement positive. Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

Soient $2 \leq p < +\infty$ et une fonction $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telle que $H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D})\right)$. D'après le lemme 4.6.3, on a :

$$\int_{\mathbb{D}} \left\| H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m}) \right\|^p_{L^2(\mathbb{D})} \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

Par conséquent, pour prouver la proposition 4.1.3, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)| \leq C \left\| H_{\bar{f}}(\widetilde{k_z^m}) \right\|_{L^2(\mathbb{D})} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}. \tag{4.6.32}$$

Pour ce faire, introduisons, pour $z \in \mathbb{D}$, la fonction $h_z$ définie par :

$$h_z(w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{3-m-1}} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, la fonction $h_z$ est orthogonale dans $L^2(\mathbb{D})$ aux fonctions holomorphes qui s'annulent en 0 puisque $h_z$ est une fonction antiholomorphe. De plus, les assertions (4.4.16) et (4.2.1) donnent :

$$\begin{aligned}
\|h_z\|^2_{L^2(\mathbb{D})} &= \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(k+3-m-1)}{k!} z^k \overline{w}^k \right\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \\
&\simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} (k^{3-m-2})^2 \frac{1}{k+1} |z|^{2k} \\
&\simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2-2m-1} |z|^{2k} \\
&\simeq \frac{1}{(1-|z|^2)^{2-2m}}\,.
\end{aligned} \tag{4.6.33}$$

On définit ensuite pour $z \in \mathbb{D}$, la fonction $\widetilde{h_z}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{h_z}(w) = \frac{h_z(w)}{\|h_z\|_{L^2(\mathbb{D})}} \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{D},$$

de sorte que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{h_z}$ est un vecteur unitaire de $L^2(\mathbb{D})$.

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\left|\left\langle \widetilde{h_z}, H_{\bar f}(\widetilde{k_z^m})\right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right| \leq \|h_z\|_{L^2(\mathbb{D})} \left\|H_{\bar f}(\widetilde{k_z^m})\right\|_{L^2(\mathbb{D})} = \left\|H_{\bar f}(\widetilde{k_z^m})\right\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

De plus, en utilisant le fait que la fonction $\widetilde{h_z}$ est orthogonale dans $L^2(\mathbb{D})$ aux fonctions holomorphes qui s'annulent en 0, les estimations (4.6.33) et (4.6.31) et la formule (4.4.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \widetilde{h_z}, H_{\bar f}(\widetilde{k_z^m})\right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right| &= \left|\left\langle \widetilde{h_z}, (I-P)(\bar f \widetilde{k_z^m})\right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right| \\
&= \left|\left\langle \widetilde{h_z}, \bar f \widetilde{k_z^m}\right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\right| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} \left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}}{(1-z\overline{w})^{3-m-1}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{m+1}}\, d\nu(w)\right| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} \left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w} f(w)}{(1-z\overline{w})^{3}}\, d\nu(w)\right| \\
&\simeq (1-|z|^2)^{2-\frac{m}{2}} |f'(z)|.
\end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité (4.6.32)a lieu et ainsi la proposition 4.1.3 est prouvée dans le cas $2 \leq p < +\infty$. □

Cette méthode peut s'étendre au cas $m = 0$. Le résultat est le suivant : pour $p \geq 2$, si $H_{\bar f} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_0, L^2(\mathbb{D}))$, alors :

$$\int_{z\in\mathbb{D}} \left((1-|z|^2)^2 |f'(z)|\right)^p \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\, d\nu(z) < \infty.$$

Mais d'après ce que nous avons obtenu dans le cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt, cette condition ne semble pas optimale.

## 4.7 Preuve de la proposition 4.1.3 dans le cas où $\frac{2}{4-m} < p < 2$

Pour prouver le proposition 4.1.3 dans le cas $\frac{2}{4-m} < p < 2$, nous allons reprendre l'approche de S. Janson dans [23], qui est basée sur l'étude du petit opérateur de Hankel associé à $H_{\bar f}$.

Soit $0 < m \leq 1$. Pour $0 < p \leq +\infty, s \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > s$, on désigne par $\mathcal{B}_p^s$ l'espace constitué des fonctions holomorphes $g$ sur $\mathbb{D}$ vérifiant :

$$\int_{\mathbb{D}} |(1-|z|^2)^{q-s} g^{(q)}(z)|^p \frac{1}{(1-|z|^2)}\, d\nu(z) < +\infty,$$

où $g^{(q)}$ désigne la dérivée $q^{ème}$ de $g$.

Si $s<1$, l'espace $\mathcal{B}_p^s$ est l'espace des fonctions holomorphes $g$ sur $\mathbb{D}$ vérifiant :

$$\int_{\mathbb{D}} |(1-|z|^2)^{1-s} g'(z)|^p \frac{1}{(1-|z|^2)} d\nu(z) < +\infty.$$

Montrons que pour $\frac{2}{4-m} < p < 2$, il existe $s<1$ tel que $\mathcal{B}_p^s = B_p^m$.
Si un tel $s>1$ existe, il doit vérifier l'équation suivante :

$$p\left(2-\frac{m}{2}\right) - 2 = p\,(1-s) - 1,$$

c'est-à-dire :

$$s = \frac{m}{2} - 1 + \frac{1}{p}.$$

En outre, l'hypothèse $p > \frac{2}{4-m}$ nous donne bien $s<1$.

Après vérification, on obtient finalement que

$$\mathcal{B}_p^{\frac{m}{2}-1+\frac{1}{p}} = B_p^m \quad \text{pour tout } \frac{2}{4-m} < p < 2.$$

Soient $\frac{2}{4-m} < p < 2$ et une fonction $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ telle que $H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p\,(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$.
On note $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$ l'espace des fonctions antianalytiques dans $L^2(\mathbb{D})$ et $\overline{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ dans $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$.
Pour $h \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, on définit le petit opérateur de Hankel de symbole $\overline{h}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{H_{\overline{h}}} : \mathcal{D}_m &\longrightarrow L^2(\mathbb{D}) \\ g &\mapsto \overline{P}\,(\bar{f}g). \end{aligned}$$

L'opérateur $\widetilde{H_{\overline{h}}}$ est le petit opérateur de Hankel associé à l'opérateur $H_{\overline{h}}$.
Si $\widetilde{H_{\overline{h}}}$ est borné sur $\mathcal{D}_m$, on désignera encore par $\widetilde{H_{\overline{h}}}$ son prolongement continu à l'espace $\mathcal{H}_m$ tout entier.

La projection $\overline{P}P$ est une projection de rang 1, car c'est une projection sur l'espace des fonctions constantes. Ainsi $\widetilde{H_{\bar{f}}} - \overline{P}H_{\bar{f}}$ est de rang au plus 1. En effet, pour tout $g \in \mathcal{D}_m$, on a :

$$[\widetilde{H_{\bar{f}}} - \overline{P}H_{\bar{f}}]\,(g) = [\overline{P} - \overline{P}(I-P)]\,(\bar{f}g) = \overline{P}P\,(\bar{f}g).$$

Par suite, comme l'opérateur $H_{\bar{f}}$ appartient à $\mathcal{S}_p\,(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$, on en déduit que le petit opérateur de Hankel $\widetilde{H_{\bar{f}}}$ qui lui est associé appartient également à $\mathcal{S}_p\,(\mathcal{H}_m, L^2(\mathbb{D}))$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}} z^n$. La famille $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_m$. Si pour $d \in \mathbb{N}$, $v_d = \sqrt{d+1}\ \overline{z}^d$, alors la famille $\{v_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ forme une base orthonormale de $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$. On souhaite calculer les éléments matriciels de $\widetilde{H_{\bar f}}$ relativement aux bases orthonormales $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_m$ et $\{v_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$. Si $f=\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$ est le développement en série entière de $f$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{H_{\bar f}}(u_n),v_d \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})} &= \left\langle \widetilde{H_{\bar f}}\left(\sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}}z^n\right),\sqrt{d+1}\,\overline{z}^d \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}(d+1)}\langle \overline{P}(\overline{f(z)}z^n),\overline{z}^d\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}(d+1)}\langle \overline{f(z)}z^n,\overline{z}^d\rangle_{L^2(\mathbb{D})}\\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}(d+1)}\frac{1}{n+d+1}\,\overline{b_{n+d}}.
\end{aligned}$$

Mais la formule de Stirling donne :

$$\sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!}(d+1)} \simeq (n+1)^{\frac{m-1}{2}}(d+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, l'opérateur $\widetilde{H_{\bar f}}$ est dans $\mathcal{S}_p\left(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D})\right)$ si et seulement si la matrice

$$A_{m,f} := \left((n+1)^{\frac{m-1}{2}}(d+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n+d+1}\overline{b_{n+d}}\right)_{n\in\mathbb{N},\,d\in\mathbb{N}}$$

définit un opérateur appartenant à $\mathcal{S}_p(l^2,l^2)$, où $l^2$ désigne l'espace des suites de carré sommable.

Or, les matrices de la forme :

$$\Gamma_\Phi^{\alpha,\beta} = \left((n+1)^\alpha(d+1)^\beta\beta_{n+d}\right)_{n\in\mathbb{N},\,d\in\mathbb{N}},$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\Phi=\sum_{k\in\mathbb{N}}\beta_k z^k$ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$, ont été étudiées par V. V. Peller dans [33] et [35] (dans le cas $p>0$) ou par S. Semmes dans [43](dans le cas$0<p<1$). Plus précisément, le théorème qui nous intéresse est le suivant :

**Théorème 4.7.1 (V.V. Peller & S. Semmes).** *Soit $\Phi$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et soit $0<p<\infty$. Supposons que* $\min\{\alpha,\beta\}>\max\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{p}\}$.
*Alors $\Gamma_\Phi^{\alpha,\beta}\in\mathcal{S}_p(l^2,l^2)$ si et seulement si $\Phi\in\mathcal{B}_p^{\frac{1}{p}+\alpha+\beta}$.*

*Preuve.* Se référer à [37]. □

Or, dans notre cas, on a :

$$A_{m,f} = \Gamma_{\Phi_f}^{\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}},$$

où $\Phi_f$ est donnée par $\Phi_f=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k+1}b_k z^k$.

Puisque $p > 2$ et $m > 0$, on a $\min\{\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}\} > -\frac{1}{2} = \max\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{p}\}$ et on déduit du théorème 4.7.1 que si $A_{m,f} \in \mathcal{S}_p(l^2,l^2)$, alors $\Phi_f \in \mathcal{B}_p^{\frac{1}{p}+\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}}$. Ceci implique que $f \in \mathcal{B}_p^{\frac{1}{p}+\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}-1} = \mathcal{B}_p^{\frac{1}{p}+\frac{m}{2}-1} = B_p^m$.

Finalement, on a montré que si $H_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_m,L^2(\mathbb{D}))$, alors $f \in B_p^m$ et par conséquent, la proposition 4.1.3 est démontrée dans le cas où $\frac{2}{4-m} < p < 2$ . Ceci conclut la preuve de la proposition 4.1.3. $\square$

# Bibliographie


[1] J. Arazy, S. Fisher, S. Janson & J. Peetre *Membership of Hankel operators on the ball in unitary ideals*, J. London. Math. Soc. (2), **43 no. 3**, (1991), 485–508.

[2] J. Arazy, S. Fisher & J. Peetre *Hankel operators on weighted Bergman spaces*, Amer. J. Math., **110**, (1988), 989–1054.

[3] S. Axler *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke. Math. J., **53 no 2**, (1986), 315–332.

[4] B. Berndtsson $\overline{\partial}$ *and Schrödinger operators*, Math. Z., **221**, (1996), 401–413.

[5] C. Berg & M. Thill *Rotation invariant moment problems*, Acta Math., **167**, (1991), 207–227.

[6] F. F. Bonsall *Boundedness of Hankel matrices*, J. London Math. Soc., **29 no 2**, (1984), 289–300.

[7] L. G. Brown, R. G. Douglas & P. A. Fillmore *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions on $C^*$-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, **345**, Springer Verlag Berlin, 1973.

[8] J. Burbea *Boundary behaviour of holomorphic functions in the ball*, Pacific J. Math., **127 no 1**, (1987), 1–17.

[9] H. Buchwalter & D. Tarral *Théorie spectrale*, Publ. Dép. Math. Lyon, 1982.

[10] D. Catlin *Subelliptic estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem on convex domains*, Ann. of Math., **126**, (1987), 131–191.

[11] D. Catlin & J. D'Angelo *Positivity conditions for bihomogenious polynomials*, Math. Res. Lett., **4**, (1997), 555–567.

[12] M. Feldman & R. Rochberg *Singular values estimates for commutators and Hankel operators on the unit ball and the Heisenberg group*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **122**, Dekker New York, (1990), 121–159.

[13] S. Fu & E. J. Straube *Compactness of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on convex domains*, J. Funct. Anal., **159**, (1998), 629–641.

[14] S. Fu & E. J. Straube *Compactness of the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Complex Analysis and Geometry (J. Mc Neal, ed.), Ohio State Math. Res. Inst. Publ., **9**, (2001), 141–160.

[15] I. Gohberg & M. G. Krein *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, American mathematical society. Translations of mathematical monographs, **0018**, 1969.

[16] P. Hartman *On completely continuous Hankel matrices*, Proc. Math. Amer. Soc., **9**, (1958), 862–866.

[17] F. Haslinger *The canonical solution operator $\overline{\partial}$ restricted to Bergman spaces*, Proc. Math. Amer. Soc., **129 no 11**, (2001), 3321–3329.

[18] F. Haslinger *Compactness of the canonical solution operator $\overline{\partial}$ restricted to Bergman spaces*, World Sci., River Edge, NJ, (2001), 394–400.

[19] F. Haslinger *The canonical solution operator to $\overline{\partial}$ restricted to spaces of entire functions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.(6), **11 no 1**, (2002), 57–70.

[20] F. Haslinger *Schrödinger operators with magnetic fields and the canonical solution operator to $\overline{\partial}$*, preprint.

[21] F. Holland & D. Walsh *Hankel operators in von-Neumann-Schatten Classes*, Ill. J. Math., **32**, (1988), 1–22.

[22] K. T. Hahn & E.H. Youssfi *Möbius invariant Besov p-spaces and Hankel operators in the Bergman space on the ball in $\mathbb{C}^n$*, Complex Variables Theory Appl., **17 no 1-2**, (1991), 89-104.

[23] S. Janson *Hankel operators between weighted Bergman spaces*, Ark. Math., **26 no 2**, (1988), 205-219.

[24] N. J. Kalton *Plurisubharmonic functions on quasi-Banach spaces*, Studia Math., **84**, (1986), 297-324.

[25] S. Krantz *Function theory of several complex variables*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1992.

[26] S. Krantz *Compactness of the $\overline{\partial}$-Neumann operator*, Proc. Amer. Math. Soc., **103**, (1988), 1136–1138.

[27] S. Lovera & E.H. Youssfi *Spectral properties of the $\overline{\partial}$-canonical solution operator*, J. Funct. Anal., **208 no 2**, (2004), 360–376.

[28] S. Lovera *Schatten class Hankel operators on holomorphic function spaces* Preprint L.A.T.P..

[29] W. Magnus, F. Oberhettinger & R. P. Soni *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer Verlag, 1966.

[30] R. Meise & D. Vogt *Introduction to functional analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, **2**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[31] Z. Nehari *On bounded linear forms*, Ann. Math., **65**, (1957), 153–162.

[32] D. J. Newman & H. S. Shapiro *Fischer spaces of entire functions*, Proc. Symp. Pure Math., **II**, (1968), 360–369.

[33] V. V. Peller *Vectorial Hankel operators, commutators and related operators of the Schatten-Von Neumann class $\mathcal{S}_p$*, Integral Equations Operator Theory, **no 5**, (1982), 244–272.

[34] V. V. Peller *Hankel operators of class $\mathcal{C}_p$ and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majorizing operators)*, Math. USSR-Sbornik, **41**, (1982), 443–479.

[35] V. V. Peller *Hankel operators of the Schatten-Von Neumann class $\mathcal{S}_p, 0 < p < 1$*, LOMI preprints E-6-82, Leningrad.

[36] V. V. Peller *A description of Hankel operators of class $\mathcal{S}_p$ for $p > 0$, an investigation of the rate of rational approximation and other applications*, Math. USSR-Sbornik, **50**, (1985), 465–494.

[37] V. V. Peller *Hankel operators and their applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[38] A. Pietsch *Operator ideals*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York; Oxford, 1980.

[39] R. M. Range *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*,Graduate Texts in Mathematics, **108**, Springer Verlag, 1986.

[40] W. Rudin *Function theory in the open unit ball in $\mathbb{C}^n$*, Springer Verlag, 1980.

[41] N. Salinas, A. Sheu & H. Upmeier *Toeplitz operators on convex domains and foliation C*-algebras*, Ann. of Math., **130**, (1989), 531–565.

[42] S. Semmes *Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces*, Integral Equations and Operator Theory, **7**, (1984), 241–281.

[43] G. Schneider *Hankel operators with antiholomorphic symbols on the Fock space*, Proc. Amer. Math. Soc., **132 no 8**, (2004), 2399–2409.

[44] M. Smith *Testing Schatten class Hankel operators and Carleson embeddings via reproducing kernels*, J. London Math. Soc., **71 no 2**, (2005), 172–186.

[45] R. Wallsten *Hankel operators between weighted Bergman spaces in the ball*, Ark. Math., **28 no 1**, (1990), 183–192.

[46] J. Wermer *Banach Algebras and Several Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York- Heidelberg,-Berlin, 1976.

[47] K. H. Zhu *Hilbert-Schmidt Hankel operators on the Bergman space*, Proc. Amer. Math. Soc., **109**, (1990), 721–730.

[48] K. H. Zhu *Schatten class Hankel operators on the Bergman space of the unit ball*, Amer. J. Math., **113**, (1991), 147–167.

[49] K. H. Zhu *Operator theory in function spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **139**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[50] K. H. Zhu *Möbius invariant Hilbert space of holomorphic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc., **323 no 2**, (1991), 823–842.

[51] K. H. Zhu *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Springer-Verlag, New York, 2004.

Cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ en liaison avec les opérateurs de Hankel dans le cas de plusieurs variables complexes. Dans un premier temps, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$. Dans le cas d'une variable complexe, F. Haslinger a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ sur l'espace de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$ et de mesure radiale $\mu$, dans l'espace $L^2$ associé, soit compact et soit un opérateur de Hilbert-Schmidt en fonction des moments de la mesure $\mu$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, portant toujours sur la croissance des moments de la mesure $\mu$, pour que l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ soit borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten, et ce dans le cas d'une ou plusieurs variables et pour toute une classe d'espaces de Hilbert contenant des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes classiques comme des espaces de Bergman à poids, des espaces de Fock, des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes, des espaces de Hardy-Sobolev, l'espace de Hardy ou l'espace invariant de Möbius. Dans un second temps, on s'intéresse à l'existence d'un opérateur de Hankel défini sur un espace de Hilbert de fonctions holomorphes, de symbole antiholomorphe non trivial dans une classe de Schatten donnée et on cherche à étudier le rapport entre la croissance d'une fonction $f$ et la taille des valeurs singulières de l'opérateur de Hankel induit par $\bar{f}$. Le cas des espaces de Bergman à poids sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ a été traité par S. Axler, J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre et S. Janson dans le cas d'une variable, et par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson, J. Peetre, R. Wallsten, K. T. Hahn, E. H. Youssfi et K. Zhu dans le cas de plusieurs variables. Dans ce travail, on considère l'espace de Hardy du disque unité de $\mathbb{C}$, l'espace de Dirichlet et des espaces de Sobolev de fonctions holomorphes sur le disque unité de $\mathbb{C}$. On donne d'abord une condition nécessaire et suffisante sur $p$ pour que la $p^{ème}$ classe de Schatten contienne un opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial. Ensuite, on caractérise les fonctions $f$ pour lesquelles l'opérateur de Hankel de symbole $\bar{f}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En outre, on établit des conditions nécessaires sur $f$ pour que l'opérateur induit par $\bar{f}$ soit un opérateur borné, compact et appartienne à la $p^{ème}$ classe de Schatten, excepté dans le cas de l'espace de Dirichlet.

This thesis deals with the spectral properties of the canonical solution operator of the $\overline{\partial}$-equation in connexion with Hankel operators in the several complex variables context. First, we study the spectral properties of the $\overline{\partial}$-canonical solution operator. In the case of one complex variable, F. Haslinger gave necessary and sufficient conditions for the $\overline{\partial}$-canonical solution operator on a weighted Bergman space of the unit disc in $\mathbb{C}$ with radial measure $\mu$, in the corresponding $L^2$-space, to be compact and to be a Hilbert-Schmidt operator. In this doctoral dissertation, we consider a Hilbert space $\mathcal{H}^{(0,1)}$ of (0,1)-forms and a space $L^2(\Omega,\mu)$ of square integrable functions with respect to the measure $\mu$ on a rotation invariant open set $\Omega$ in $\mathbb{C}^n$. We give necessary and sufficient conditions, in terms of the moments of the measure $\mu$, for the canonical solution operator of the $\overline{\partial}$-equation to be bounded, compact and in the Schatten $p$-class from $\mathcal{H}^{(0,1)}$ into $L^2(\Omega,\mu)$. Examples of $\mathcal{H}^{(0,1)}$ can be chosen to be the space of (0,1)-forms with coefficients in one of the classical Hilbert spaces of holomorphic functions such as weighted Bergman spaces, Fock spaces, Hardy-Sobolev spaces, Sobolev spaces of holomorphic functions or the Möbius invariant space. Secondly, we are interested in the existence in a given Schatten class of a non-zero Hankel operator with antiholomorphic symbol on a Hilbert space of holomorphic functions and we study the connection between the growth of a function $f$ and the size of the singular values of the Hankel operator of symbol $\bar{f}$. The case of weighted Bergman spaces on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ has been studied by S. Axler, J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre and S. Janson in the context of one complex variable, and by J. Arazy, S. Fisher, S. Janson, J. Peetre, R. Wallsten, K. T. Hahn, E. H. Youssfi et K. Zhu in the context of several complex variables. In this work, we consider the Hardy space on the unit disc in $\mathbb{C}$, the Dirichlet space and Sobolev spaces of holomorphic functions on the unit disc. We give a necessary et sufficient condition on $p$ for the Schatten $p$-class to contain a non-zero Hankel operator with antiholomorphic symbol. Then, we characterize the functions $f$ such that the Hankel operator of symbol $\bar{f}$ is a Hilbert-Schmidt operator. Moreover, we give necessary conditions on $f$ for the Hankel operator of symbol $\bar{f}$ to be bounded, compact and in the Schatten $p-$class, except in the case of the Dirichlet space.

**Mots clés:** Classes de Schatten, Opérateur de Hankel, Équation du $\overline{\partial}$.

**Classification mathématique: 32W05, 47B35, 47B10, 47B38.**